

# Algebra I

Näited polünoomide juurtega seotud ülesannetest.

**Ülesanne 1.** Konstrueerida polünoom  $f(x)$  Lagrange'i interpolatsioonivalemi abil, kasutades järgnevat väärtuste tabelit:

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	1	-1	-3	1

**Lahendus:**

Lagrange'i interpolatsioonivalem on  $\sum_{i=1}^n b_i \prod_{j \neq i} \frac{x-c_j}{c_i-c_j}$ .

Antud juhul saame sellest välja kirjutada

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-2}{0-2} \cdot \frac{x-3}{0-3} \\ &+ (-1) \cdot \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} \\ &+ (-3) \cdot \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} \\ &+ 1 \cdot \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2} \\ &= -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{2}x(x-2)(x-3) \\ &+ \frac{3}{2}x(x-1)(x-3) + \frac{1}{6}x(x-1)(x-2) \\ &= -\frac{1}{6}(x^3 + -6x^2 + 11x - 6) - \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x) \\ &+ \frac{3}{2}(x^3 - 4x^2 + 4x) + \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x) \\ &= x^3 - 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

Kontroll:

$$f(0) = 0 + 0 + 0 + 1 = 1, f(1) = 1 - 3 + 1 = -1,$$

$$f(2) = 8 - 12 + 1 = -3, f(3) = 27 - 27 + 1 = 1.$$

**Ülesanne 2.** Leida polünoom  $g(x)$ , millel on samad taandumatud tegurid, kui polünoomil  $f(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1$ , kuid kordsusega 1, st eraldada polünoomi  $f(x)$  kordsed tegurid, ning lahutada polünoom  $f(x)$  lineaartegurite korrutiseks üle  $\mathbb{C}$ .

**Lahendus:** Esiteks leiame Eukleidese algoritmi abil  $\text{SÜT}(f(x), f'(x))$ . Ilmselt  $f'(x) = 6x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 2x - 2$ . Kuna suurim ühistegur on määratud pööratava kordaja täpsusega, võime jagamisel vahetulemusi korrutada ja jagada vastavalt vajadusele, sest see muudab vaid kordajat leitava ühisteguri ees. Kõigepealt:

$$\begin{array}{r|l} 18x^6 & -36x^5 - 18x^4 + 72x^3 - 18x^2 - 36x + 18 \\ 18x^6 & -30x^5 - 12x^4 + 36x^3 - 6x^2 - 6x \\ \hline & -6x^5 - 6x^4 + 36x^3 - 12x^2 - 30x + 18 \\ & -6x^5 + 10x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2x + 2 \\ \hline & -16x^4 + 32x^3 - 32x + 16 \end{array}$$

Teiseks:

$$\begin{array}{r|l} 6x^5 & -10x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 2x - 2 \\ 6x^5 & -12x^4 + 12x^2 - 6x \\ \hline & 2x^4 - 4x^3 + 4x - 2 \\ & 2x^4 - 4x^3 + 4x - 2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Seega

$$\text{SÜT}(f(x), f'(x)) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1.$$

Nüüd jagame  $f(x)$  leitud suurima ühisteguriga:

$$\begin{array}{r|l} x^6 - 2x^5 & -x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1 \\ x^6 - 2x^5 & +2x^3 - x^2 \\ \hline & -x^4 + 2x^3 - 2x + 1 \\ & -x^4 + 2x^3 - 2x + 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Olemegi saanud, et polünoomi  $f(x)$  kordsete tegurite eraldamisel on tulemuseks  $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ . Lihtne kontroll Horneri skeemi abil näitab, et  $-1$  on kahe- ja 1 neljakordne juur:

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & -2 & -1 & 4 & -1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & -1 & |0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & & |0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & & & |0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 & & & & |0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 4 & & & & |4 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc|c} & 1 & 2 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & |0 \\ \hline -1 & 1 & & |0 \end{array}$$

**Vastus:** polünoomi  $f(x)$  kordsete tegurite eraldamisel on tulemuseks polünoom  $(x + 1)(x - 1)$ , ja

$$x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x + 1)^2(x - 1)^4.$$