Algebra I

Kuidas lahendada 7. tunnikontrolli ülesandeid

Ülesanne 1. Defineerime teisenduse $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seosega $\varphi(x, y) = (x - y, x + y)$. Kontrollida, kas φ on lineaarteisendus. Kui ta seda on, siis leida φ maatriks baasil $((2, 1), (1, 1))$.

Lahendus: Lineaarteisenduseks olek tähendab, et suvaliste $x, y \in V$, $k \in K$ korral kehtivad seosed

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ja

$$\varphi(kx) = k\varphi(x).$$

Kuna meil on $V = \mathbb{R}^2$, siis tähistame $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$. Nüüd tuleb veenduda, et

$$\begin{aligned} \varphi(x + y)) &= \varphi((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= ((x_1 + y_1) - (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) \\ &= (x_1 + y_1 - x_2 - y_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \varphi(y)) &= \varphi(x_1, x_2) + \varphi(y_1, y_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2) + (y_1 - y_2, y_1 + y_2) \\ &= ((x_1 - x_2) + (y_1 - y_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 - x_2 + y_1 - y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \end{aligned}$$

on võrdsed. Seda nad tõepoolest on. Analoogiliselt

$$\begin{aligned} \varphi(k(x, y)) &= \varphi(kx, ky) = (kx - ky, kx + ky) = (k(x - y), k(x + y)) \\ &= k(x - y, x + y) = k\varphi(x, y). \end{aligned}$$

Lineaarteisenduse φ maatriksi leidmiseks baasil $(2, 1), (1, 1)$ tuleb leida $\varphi(2, 1) = (2 - 1, 2 + 1) = (1, 3)$ ja $\varphi(1, 1) = (1 - 1, 1 + 1) = (0, 2)$ koordinaadid baasil $(2, 1), (1, 1)$. St. meil on vaja leida $k_1, l_1, k_2, l_2 \in \mathbb{R}$ nii, et $k_1(2, 1) + l_1(1, 1) = (1, 3)$ ja $k_2(2, 1) + l_2(1, 1) = (0, 2)$. Vastavatest lineaarvõrrandisüsteemidest saame, et $k_1 = -2$, $l_1 = 5$, $k_2 = -2$, $l_2 = 4$. Tähistame $e := \{(2, 1), (1, 1)\}$. Siis eelneva põhjal saame leitud koordinaate veergudesse kirjutades, et $A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Vastus: Teisendus φ on lineaarteisendus ja tema maatriks baasil $((2, 1), (1, 1))$ on $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Ülesanne 2. Olgu antud lineaarteisendus $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seosega $\psi(x, y, z) = (x - y, y + z, x + z)$. Leida ψ tuum ja kujutis.

Lahendus: Lineaarkujutuse ψ tuuma leidmiseks peame lahendama võrrandi $\psi(x) = 0$. Tähistades $x = (x, y, z)$, on see võrrand

$$(0, 0, 0) = 0 = \psi(x, y, z) = (x - y, y + z, x + z).$$

Seega on vaja lahendada lineaarvõrrandisüsteem laiendatud maatriksiga $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Viimase lahenditeks tulevad $x = y = -z = c \in \mathbb{R}$. Järelikult $\operatorname{Ker}\psi = \{(c, c, -c) | c \in \mathbb{R}\}$.

Kujutise $\operatorname{Im}\psi$ leidmiseks piisab leida mõne baasi vektorite kujutiste lineaarkate. Kõige lihtsam on võtta baasiks $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ja leida, et

$$\operatorname{Im}\psi = \operatorname{span}\{\psi(1, 0, 0), \psi(0, 1, 0), \psi(0, 0, 1)\} = \operatorname{span}\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1)\}.$$

Kuna $(0, 1, 1) = (1, 0, 1) + (-1, 1, 0)$, siis

$$\begin{aligned} \operatorname{span}\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1)\} &= \operatorname{span}\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \\ &= \{a(1, 0, 1) + b(-1, 1, 0) | a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a - b, b, a) | a, b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Järelikult $\operatorname{Im}\psi = \{(a - b, b, a) | a, b \in \mathbb{R}\}$.

Vastus: Lineaarteisenduse ψ tuum ja kujutis on
$\operatorname{Ker}\psi = \{(c, c, -c) | c \in \mathbb{R}\}$ ja $\operatorname{Im}\psi = \{(a - b, b, a) | a, b \in \mathbb{R}\}$.