Arvuteooria 15. praktikumi ülesanded: Arvuvaldade laiendamine.

1. Defineerime hulgal $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ binaarse seose $\sim$ järgmiselt:

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc.$$

Tähistame

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) \,/ \sim\ = \{[(a, b)] \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

ning defineerime liitmise ja korrutamise hulgal $\mathbb{Q}$ võrdustega $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ ja $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Tõestada, et liitmine on korrutamise suhtes distributiivne ja leida nullist erineva elemendi $\frac{a}{b}$ pöördelement.

2. Olgu $F(\mathbb{Q})$ kõigi ratsionaalarvuliste Cauchy jadade hulk. Defineerime hulgal $F(\mathbb{Q})$ seose $\sim$ järgmiselt:

$$(a_i) \sim (b_i) \Longleftrightarrow (a_i - b_i) \text{ on nulljada .}$$

Tähistame

$$\mathbb{R} = F(\mathbb{Q})/ \sim= \{[(a_i)] \mid (a_i) \in F(\mathbb{Q})\}$$

ja defineerime korrutamise hulgal $\mathbb{R}$ võrdusega $[(a_i)] \cdot [(b_i)] = [(a_i \cdot b_i)]$. Tõestada, et selline korrutamine on korrektselt defineeritud.

3. Tõestada, et kui $(a_i), (b_i) \in F(\mathbb{Q})$, (a_i) on positiivne ja $(a_i) \sim (b_i)$, siis ka (b_i) on positiivne.

4. Tõestada, et Dedekindi lõige α (s.o. parempoolne hulk) on ratsionaalne siis ja ainult siis, kui hulga α täiendil $\overline{\alpha}$ on olemas suurim element.

5. Leida $|a - b|_p$, s.t. p-aadiline kaugus a ja b vahel, kui
a) $a = 1, b = \frac{1}{243}, p = 3$; b) $a = 15!, b = 0, p = 5$.

6. Esitada arvud 38 ja 28 3-aadilisel kujul. Leida 3-aadilisel kujul nende summa ja vahe.

7. Tõestada, et kui $\|\cdot\|$ on mittearhimeediline norm kommutatiivsel korpusel K, siis iga täisarvu m korral $\|m\mathbf{1}\| \leq 1$.

8. Tõestada, et mistahes ratsionaalarvude a, b, c ja algarvu p korral on vähemalt kaks arvudest $|a-b|_p$, $|b-c|_p$ ja $|a-c|_p$ võrdsed (s.t. p-aadilise kauguse mõttes on iga kolmnurk võrdhaarne).

9*. Tõestada, et kui $\|\cdot\|$ on selline norm kommutatiivsel korpusel K, et $\|m\mathbf{1}\| \leq 1$ iga täisarvu m korral, siis $\|\cdot\|$ on mittearhimeediline norm.

10**. Olgu α reaalarv, $0 < \alpha < 1$. Tõestada, et norm $|\cdot|^\alpha : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $x \mapsto |x|^\alpha$, on ekvivalentne absoluutväärtusega.