Arvuteooria 6. praktikumi ülesanded: Arvuteoreetilised funktsioonid.

1. Tõestada, et $\varphi(3n) = 3\varphi(n)$ parajasti siis, kui $3 \mid n$. Millega võrdub $\varphi(3n)$, kui n ei jagu 3-ga?

2. Kui palju on selliseid naturaalarve, mis ei ole suuremad kui 2015 ja mille suurim ühistegur arvuga 2015 ei ole suurem kui 5?

3. Millega on võrdne summa

$$S = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) + \varphi(24) + \varphi(48)?$$

4. Leida naturaalarv n, kui on teada, et $\varphi(n) = 11\,424$ ja $n = p^2q^2$, kus p ja q on erinevad algarvud.

5. Tõestada, et kui p on paaritu algarv, siis

$$1^p + 2^p + 3^p + \ldots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}.$$

6. Tõestada, et iga täisarvu a korral $a^{37} \equiv a \pmod{1729}$.

7. Olgu p ja $q = (p-1)t+1$ ($t \in \mathbb{N}$) kaks algarvu, kusjuures $t > 1$. Tõestada, et $2^{pq} \equiv 2^p \pmod{pq}$. Tuua mõni näide sellistest algarvudest p ja q.

8. Tõestada, et iga naturaalarvu n korral $\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$.

9. Tõestada, et ükski täisruut (s.o. täisarvu ruut) ei ole täiuslik arv (s.t. selline arv n, mille korral $\sigma(n) = 2n$).

10*. Olgu $k > 1$ naturaalarv. Tõestada, et leidub lõpmata palju selliseid naturaalarve l, mille korral $\tau(l) = k$, aga ainult ülimalt lõplik arv naturaalarve m, mille korral $\sigma(m) = k$.

11**. Tõestada, et kui naturaalarv n ei ole algarv ja $\varphi(n) \mid n-1$, siis arvul n on vähemalt neli erinevat algtegurit.