Arvuteooria 8. praktikumi ülesanded: Hiina jäägiteoreem.

1. Lahendada kongruentside süsteem

$$\begin{cases} 3x \equiv 1 & \pmod 5 \\ 4x \equiv 6 & \pmod{14} \\ 5x \equiv 11 & \pmod 3. \end{cases}$$

2. Fikseerime Veenuse ja Merkuuri asendi tähtede suhtes. Mitme ööpäeva järel on nendel planeetidel jälle sama asend tähtede suhtes, kui Veenus teeb täistiiru 225 ööpäevaga ning Merkuuril kulub selleks 88 ööpäeva?

3. Olgu p_i i-s algarv. Tõestada, et iga naturaalarvu k korral leidub selline naturaalarv n, et $2 \mid n+1,\ 3 \mid n+2, \ldots, p_k \mid n+k$.

4. (Hiina jäägiülesanne) Seitseteist piraati said saagiks kotitäie kuldmünte. Kui nad püüdsid seda varandust võrdseteks osadeks jagada, jäi 3 münti üle. Tekkis vaidlus selle üle, kuidas ülejääki jagada, ning selle vaidluse käigus löödi üks mees maha. Raha jagati uuesti, kuid seekord jäi 10 münti üle. Jälle tõusis tüli ning veel üks mees saadeti haidele söödaks. Järelejäänud mehed jagasid saagi uuesti ja seekord said nad selle jagatud võrdseteks osadeks. Milline on vähim võimalik müntide arv, mis saagiks saadi?

5. Lahendada kongruentside süsteem

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 & \pmod 3 \\ 5x \equiv 4 & \pmod 6 \\ 3x \equiv 6 & \pmod 8 \\ 7x \equiv 8 & \pmod 9. \end{cases}$$

6. Leida kolm järjestikust naturaalalarvu, millest igaüks jagub mingi algarvu ruuduga.

7. Olgu a ja b täisarvud ning n_1 ja n_2 naturaalarvud. Tõestada, et kongruentside süsteem

$$\begin{cases} x \equiv a & \pmod{n_1} \\ x \equiv b & \pmod{n_2} \end{cases}$$

on lahenduv parajasti siis, kui $(n_1, n_2) \mid a - b$. Näidata, et kui see süsteem on lahenduv, siis selle lahend on ühene mooduli $[n_1, n_2]$ järgi.

8. Koostada tekstülesanne, mille lahendamiseks saab kasutada Hiina jäägiteoreemi. (Ülesande tekst ja selle lahendus tuleb esitada kirjalikult. Kõige originaalsema ülesande ja kõige raskema ülesande koostajad saavad kumbki 3-5 punkti sõltuvalt ülesande tasemest. Kloonitud ülesannete esitajad saavad 0 punkti.)

9*. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\Phi_n := 2^{2^n} + 1$ (*Fermat' arvud*). Tõestada, et iga naturaalarvu n korral leiduvad n järjestikust täisarvu $N, N+1, \ldots, N+n-1$ nii, et $\Phi_1 \mid N$, $\Phi_2 \mid N+1, \ldots, \Phi_n \mid N+n-1$. Milline on N vähim võimalik väärtus $n = 3$ korral?