Kevad 2014

Arvuteooria 10. praktikumi ülesanded:

Algjuured II.

1. Leida kõik algjuured mooduli 37 järgi.

2. Tõestada, et 3 on algjuur kõigi naturaalarvude jaoks, mis on kujul 17^k või $2 \cdot 17^k$, $k \in \mathbb{N}$.

3. Teha kindlaks, kas mooduli n järgi leidub algjuuri ning kui leidub, siis leida nende arv ja üks algjuur, kui a) $n = 50$, b) $n = 53$, c) $n = 56$.

4. Teha kindlaks, kas mooduli n järgi leidub algjuuri ning kui leidub, siis leida nende arv ja üks algjuur, kui a) $n = 81$, b) $n = 82$, c) $n = 85$.

5. Olgu p algarv, a täisarv ja $(a, p) = 1$. Tõestada, et kongruentsil $x^n \equiv a \pmod{p}$ on kas

a. $(n, p-1)$ lahendit, kui $a^{\frac{p-1}{(n,p-1)}} \equiv 1 \pmod{p}$ või

b. mitte ühtegi lahendit, kui $a^{\frac{p-1}{(n,p-1)}} \not\equiv 1 \pmod{p}$.

6. Leida, mitu lahendit on kongruentsidel $x^{20} \equiv 13 \pmod{17}$ ja $x^{24} \equiv 13 \pmod{17}$.

7. Lahendada kongruentsid $x^{20} \equiv 13 \pmod{17}$ ja $x^{24} \equiv 13 \pmod{17}$, kasutades selleks mingit algjuurt mooduli 17 järgi.

8. Lahendada kongruents $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \equiv 0 \pmod{43}$.

9. Olgu p paaritu algarv. Tõestada, et kui a ja b on algjuured mooduli p järgi, siis ab ei ole algjuur mooduli p järgi.

10^*. Tõestada, et iga algarvu p korral on jadas $1+p, 1+2p, 1+3p, \ldots$ lõpmata palju algarve.

11^{**}. Tõestada, et iga naturaalarvu n korral on jadas $1+n, 1+2n, 1+3n, \ldots$ lõpmata palju algarve.