Kevad 2014

Arvuteooria 15. praktikumi ülesanded: Arvuvaldade laiendamine.

1. Defineerime hulgal $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ binaarse seose $\sim$ järgmiselt:

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc.$$

Tähistame

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) / \sim \; = \{[(a, b)] \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

ning defineerime korrutamise hulgal $\mathbb{Q}$ võrdusega $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Tõestada, et see korrutamine on korrektselt defineeritud.

2. Olgu $F(\mathbb{Q})$ kõigi ratsionaalarvuliste Cauchy jadade hulk. Defineerime hulgal $F(\mathbb{Q})$ seose $\sim$ järgmiselt:

$$(a_i) \sim (b_i) \Longleftrightarrow (a_i - b_i) \text{ on nulljada .}$$

Tähistame

$$\mathbb{R} = F(\mathbb{Q}) / \sim = \{[(a_i)] \mid (a_i) \in F(\mathbb{Q})\}$$

ning defineerime liitmise ja korrutamise hulgal $\mathbb{R}$ võrdustega $[(a_i)] + [(b_i)] = [(a_i + b_i)]$ ja $[(a_i)] \cdot [(b_i)] = [(a_i \cdot b_i)]$. Tõestada, et selline liitmine on korrutamise suhtes distributiivne.

3. Defineerime, et reaalarv $[(a_i)] \in \mathbb{R}$ on positiivne (negatiivne, null), kui leidub selline ratsionaalarv $\varepsilon > 0$, et leidub naturaalarv N nii, et $i \geq N$ korral $a_i > \varepsilon$ (vastavalt $a_i < -\varepsilon$, $|a_i| < \varepsilon$). Tõestada, et iga reaalarv on kas positiivne, negatiivne või null.

4. Tõestada, et Dedekindi lõige $\sqrt{3} = \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0,\ a^2 > 3\}$ ei ole ratsionaalne.

5. Olgu $\|\cdot\|$ mittearhimeediline norm korpusel K ja $k, l, m \in K$. Tõestada, et vähemalt kaks arvudest $\|k - l\|$, $\|l - m\|$ ja $\|m - k\|$ on võrdsed (st. mittearhimeedilise kauguse mõttes on iga kolmnurk võrdhaarne).

6. Tõestada, et kui x on ratsionaalarv ja $|x|_p \leq 1$ iga algarvu p korral, siis x on täisarv.

7. Leida $|a - b|_p$, s.t. p-aadiline kaugus a ja b vahel, kui
a) $a = 15!, b = 0, p = 7$; b) $a = 1, b = 63/243, p = 3$; c) $a = 2/3, b = -(7+2/3), p = 5$.

8. Esitada arvud $38\frac{1}{9}$ ja $28\frac{2}{3}$ 3-aadilisel kujul (kolmendmurruna). Korrutada need arvud 3-aadilisel kujul.

9*. Olgu $0 < \alpha < 1$ reaalarv ning p ja q erinevad algarvud. Tõestada, et p-aadiline norm $|\cdot|_p$ on ekvivalentne normiga $|\cdot|_\alpha : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, kus $|0|_\alpha = 0$ ja $x \neq 0$ korral $|x|_\alpha = \alpha^{\mathrm{ord}_p x}$, ja ei ole ekvivalentne normiga $|\cdot|_q$.

10**. Olgu K loenduva võimsusega korpus ja $\|\cdot\|$ mittetriviaalne norm korpusel K. Tõestada, et see normeeritud korpus ei ole *täielik* (täielikkus tähendab seda, et kõik Cauchy jadad koonduvad selle korpuse elemendiks).