Kevad 2014

Märkusi arvuteooria 2. praktikumi kohta:

A. Esmalt tooks esile, et mitmed kirjalikud lahendused olid väga sarnased, identsete vigade ja sõnastuseni välja. Ma ei kavatse selle välistamiseks mingeid eraldi meetmeid rakendama hakata, aga rõhutan siinkohal, et eksam koosneb pooles ulatuses ülesannetest, on individuaalne ja materjale ei saa kasutada. Seega kui te lihtsalt kaasüliõpilaste pealt või raamatust või kusagilt kolmandast kohast maha kirjutate, siis te põhimõtteliselt saboteerite iseenda võimet eksamit sooritada. On täiesti normaalne ja isegi soovitatav kontrollida vastastikku vastuseid ja lahendusi, või isegi ülesandeid koos lahendada, aga oma lahenduskäigu peate te lõpuks ikkagi ise kokku panema ja olema võimeline seda oma sõnadega seletama ning üles kirjutama.

B. Tänu tahvli piiratusele olen ma sunnitud loengus ja praktikumis ainult materjali matemaatilist osa kirja panema, aga kui teil ajalisi piiranguid ei ole, siis on väga soovitatav oma lahendused täislausetega ja ilma konspektiivset stiili kasutamata korrektselt kirja panna. See tähendab täislauseid, iga mõttekäik peab olema mõne lause osa, kvantorid ja loogilised tehted on lubatud eraldi real olevates valemites, aga mitte lause sees, jms. Loengus ja näidislahendusi tahvlile tehes püüan ma alati välja öelda selle lause, mille osaks tahvlile ilmuv matemaatiline tekst olema peab. On soovitatav püüda võimalikult palju neid lauseid oma konspekti kirja panna ja kui teil jääb midagi olulist vahele, siis te saate alati üle küsida (á la "Vabandage, aga mida see valemirida seal tahvli all paremas nurgas tähendab, te ütlesite seda väga kiiresti ja ma ei jõudnud jälgida.").

C. Kui te saate oma kirjaliku lahenduse tagasi ja kas ei saa aru, mida ma teile selle juures ette heidan, või ei ole sellega nõus, siis alati tulge ja küsige üle. On täiesti võimalik (kuigi mitte väga tõenäoline), et ma olen kusagil vea teinud.

D. Kuigi ma ütlesin, et praktikumi ei ole vaja tulla ja piisab ülesannete esitamisest, siis praktikumis käimine on ikkagi kasulik ja võimalusel tuleks seda teha. Isegi juhul, kui te samaaegselt lahendused kirjalikult esitate. Kui te ei taha tahvli juures käia, siis lihtsalt pange oma lahendused kirja ja öelge mulle enne praktikumi algust, et te andsite oma lahendused ära ja ei soovi neid tahvli ees demonstreerida. Muuseas, kuigi ma aktsepteerin sellist tegevust, siis tahvli ees esinemise kogemus on samuti kasulik ja on üldiselt oskus, mida võiks endas arendada.

E. Kui te saadate oma kirjalikud lahendused elektrooniliselt pildifailidena, siis kõigepealt vähendage piltide (tüüpiliselt JPEG) kvaliteeti niivõrd, et nad ikka veel loetavad on. See annab tavaliselt failimahu juures päris palju kokkuhoidu ja ma ei taha oma postkastist ühel päeval 200 MB ulatuses lahendusi leida.

F. Ülesannete kaupa esines järgnevaid tüüpvigu:

1. Jaguvuse definitsioon on

$$a \mid b \Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : ac = b,$$

mitte

$$a \mid b \Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : ac = b.$$

Kui $d = (a, b)$ ja $e \mid a$ ning $e \mid b$, siis $e \mid d$, mitte $d \mid e$.
Kui $a \mid b$ ja $b \mid a$ ning $a, b \in \mathbb{Z}$, siis $|a| = |b|$, mitte $a = b$.
Esines ebavajalik tingimus $(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}) = 1$, mida ei põhjendatud.

2. Eukleidese algoritmi jagamistehted tuleb teostada võrduste kujul (vt. loengukonspekt), sest muidu on seda raske teisipidi teha juhul, kui me tahame suurimat ühistegurit "lineaarkombinatsioonina" avaldada.
Vähimat ühiskordset on hea leida valemist $[a, b] = \frac{a \cdot b}{(a,b)} = \frac{a}{(a,b)} \cdot b$, sest jagatis $\frac{a}{(a,b)}$ sisuliselt juba esineb Eukleidese algoritmis.
Algtegurite leidmine on võrreldes Eukleidese algoritmiga arvutuslikult tunduvalt keerulisem, ja seal on lihtsam vigu teha (näiteks arvata, et mingi kordarv on algtegur).

3. Paljud lahendasid siin diofantilist võrrandit $(135, 60) = 15 = 60x + 135y$. See ei ole vajalik, piisab vaid võrrandi $135 = 2 \cdot 60 + 15$ kasutamisest leidmaks, et $15 = 135 - 2 \cdot 60$.

4. Rohkelt leidsid kasutamist tõestuseta faktid $(a, b) = (a, a + b)$ ja

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad [(ta, b) = 1 \Rightarrow (a, b) = 1].$$

Kui te mingit loengus mitte tõestatud abitulemust kasutate, siis on see igal juhul vaja ära tõestada. Loengus olnud tulemusetele on vaja viidata (selleks on meil elektrooniline loengukonspekt nummerdatud tulemustega).

5. Optimaalne meetod on diofantilise võrrandi $2x + 20y = 666$ lahendamine, mitte "näppudel lugemine".

6. Võrrandi $5x + 9y = 223$ erilahendite leidmise üldine meetod on:
  1) avaldada $1 = (5, 9) = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 9$;
  2) korrutada läbi arvuga 223: $223 = 5 \cdot 446 + 9 \cdot (-223)$.
Reisijate arv on mittenegatiivne täisarv, st. ka 0 (täispiletiga) reisijat on võimalik.
Reaalsusesse tagasi tulles, bussi istekohtade arv võib olla piiratud näiteks 40-ga.

7. Mitmed lahendused kasutasid kaks korda (aga eri situatsioonides) jaguvuse definitsiooni, ja jätsid selle kohaselt leiduva täisarvu tähise samaks. Siit oli lihtne tulla järeldusele, et need kaks eri täisarvu on võrdsed (sest neid tähisti sama sümboliga!), mis tegelikult ei ole tõsi.
Vaja oli tõestada, et leidub lõpmata palju naturaalarvulisi, st. POSITIIV-SEID lahendipaare. Kui diofantilisel võrrandil $ax + by = c$ lahendeid üldse on, siis lahendi üldkuju kohaselt on neid ilmselt lõpmata palju, aga nad ei pruugi samaaegselt positiivsed olla.
Mitmes lahenduses lihtsalt eeldati, et see diofantiline võrrand on lahenduv. Diofantilised võrrandid ei ole automaatselt lahenduvad ja meil on olemas lahenduvuse kontrolli kriteerium.