Kevad 2014

# Näide p-aadiliste arvudega arvutamisest

1. Leiame ratsionaalarvude $\frac{1}{6}$ ja $2\frac{1}{2}$ esitused 3-aadiliste arvudena ning arvutame sel kujul nende summa, vahe ja korrutise.

Iga 3-aadiline arv $a$ on üheselt esitatav potentsiaalselt lõpmatu summana

$$a \;=\; \frac{a_0}{3^m} + \frac{a_1}{3^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{3} + a_m + a_{m+1}\cdot 3 + a_{m+2}\cdot 3^2 + a_{m+2}\cdot 3^3 + \ldots$$

Lühidalt võib sellise esituse kirja panna kolmendmurruna

$$a = a_0 a_1 \ldots a_{m-1}, a_m a_{m+1} a_{m+2} \ldots$$

Kui $a$ on täisarv, siis tema 3-aadiline kuju on lihtsalt vastav kolmendsüsteemi arv, näiteks

$$1 = \underline{1}\cdot 1 = 0,1;\; 6 = \underline{0}\cdot 1 + \underline{2}\cdot 3 = 0,02; 5 = \underline{2}\cdot 1 + \underline{1}\cdot 3 = 0,21;\; 2 = \underline{2}\cdot 1 = 0,2.$$

Leiame jagamise teel arvude $\frac{1}{6} = 0,1/0,02$ ja $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 0,21/0,2$ 3-aadilised kujud. Tehted 3-aadiliste arvudega on sarnased kümnendmurdudega sooritatavate tehetega, kuid mõnede oluliste erinevustega:

- laenamisel ja liitmisel liigutakse vasakult paremale;
- arvutatakse alusel 3, näiteks $2\cdot 2 = 4 = \underline{1}\cdot 1 + \underline{1}\cdot 3 = \underline{0,11}$;
- on võimalik laenata paremalt "lõpmatusest", näiteks

$$\begin{array}{rcr}
\underline{2}\cdot 3^{-1} + \underline{1}\cdot 3^0 + & 0\cdot 3^1 + & \underline{0}\cdot 3^2\ldots \\
-\underline{1}\cdot 3^{-1} + \underline{1}\cdot 3^0 + & 1\cdot 3^1 + & \underline{0}\cdot 3^2\ldots \\
\hline
\underline{1}\cdot 0^{-1} + \underline{0}\cdot 3^0 + & \{\underline{0} + \mathit{3} - \underline{1}\}\cdot 3^1 + & \{\underline{0} - \mathit{1} + \mathbf{3} - \underline{0}\}\cdot 3^2\ldots
\end{array}$$

ehk

$$\begin{array}{rr}
 & 2,1000\ldots \\
- & 1,1100\ldots \\
\hline
 & 1,0222\ldots
\end{array}$$

Kasutame nüüd eeltoodut ja arvutame $\frac{1}{6} = 0,1/0,02$:

$$
\begin{array}{l|l}
1{\cdot}3^0{+}0{\cdot}3^1{+}0{\cdot}3^2{+}{\cdot}3^3{+}\ \ 0{\cdot}3^4{+}\ \dots & 0{\cdot}3^{-1}{+}\ \ 0{\cdot}3^0{+}2\cdot 3^1 \\
\cline{2-2}
\underline{1{\cdot}3^0{+}1\cdot 3^1\phantom{{+}0{\cdot}3^2}} & 2{\cdot}3^{-1}{+}\ \ 1{\cdot}3^0{+}1{\cdot}3^1{+}1{\cdot}3^2{+}1{\cdot}3^3{+}\dots \\
\qquad\quad 2{\cdot}3^1{+}2{\cdot}3^2{+}2{\cdot}3^3{+}2{\cdot}3^4{+}\ \dots & \\
\qquad\quad \underline{2{\cdot}3^1{+}\phantom{2{\cdot}3^2{+}2{\cdot}3^3{+}2{\cdot}3^4{+}\ \dots}} & \\
\qquad\qquad\quad 2{\cdot}3^2{+}2{\cdot}3^3{+}2{\cdot}3^4{+}\ \dots & \\
\qquad\qquad\quad \underline{2\cdot 3^2\phantom{{+}2{\cdot}3^3{+}2{\cdot}3^4{+}\ \dots}} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2{\cdot}3^3{+}2{\cdot}3^4{+}\ \dots & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{2\cdot 3^3\phantom{{+}2{\cdot}3^4{+}\ \dots}} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2{\cdot}3^4{+}\ \dots &
\end{array}
$$

Eelneva ja jagamistehte $2\frac{1}{2} = 0,21/0,2$ võime lühidalt kirja panna kujul

$$
\begin{array}{l|l}
0,1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \dots & 0,0\ 2 \\
\cline{2-2}
\underline{0,1\ 1} & 2,1\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
0,0\ 2\ 2\ 2\ 2\ \dots & \\
\underline{0,0\ 2} & \\
0,0\ 0\ 2\ 2\ 2\ \dots & \\
\underline{0,0\ 0\ 2\phantom{\ 2\ 2\ \dots}} & \\
0,0\ 0\ 0\ 2\ 2\ \dots & \\
\underline{0,0\ 0\ 0\ 2\phantom{\ 2\ \dots}} & \\
0,0\ 0\ 0\ 0\ 2\ \dots &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
0,2\ 1\ 0\ 0\ 0\ \dots & 0,2 \\
\cline{2-2}
\underline{0,2\phantom{\ 1}} & 0,1\ 2\ 1\ 1\ \dots \\
0,0\ 1 & \\
\underline{0,0\ 1\ 1} & \\
0,0\ 0\ 2\ 2\ 2\ \dots & \\
\underline{0,0\ 0\ 2\phantom{\ 2\ 2\ \dots}} & \\
0,0\ 0\ 0\ 2\ 2\ \dots & \\
\underline{0,0\ 0\ 0\ 2\phantom{\ 2\ \dots}} & \\
0,0\ 0\ 0\ 0\ 2\ \dots &
\end{array}
$$

Järelikult $\frac{1}{6} = 0,1/0,02 = 2,(1)$ ja $2\frac{1}{2} = 0,21/0,2 = 0,12(1)$. Kontrolli mõttes võime need 3-aadilised esitused uuesti ratsionaalarvudeks teisendada. Selleks kasutame loengukonspekti lemmat 10.17, mille kohaselt

$$1 + 3 + 3^2 + \ldots = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Seetõttu

$$
\begin{aligned}
2,(1) &= \frac{2}{3} + \underline{1} \cdot 1 + \underline{1} \cdot 3 + \underline{1} \cdot 3^2 + \underline{1} \cdot 3^3 + \underline{1} \cdot 3^4 + \ldots \\
&= \frac{2}{3} + (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
0,12(1) &= \underline{1} \cdot 1 + \underline{2} \cdot 3 + \underline{1} \cdot 3^2 + \underline{1} \cdot 3^3 + \underline{1} \cdot 3^4 + \ldots \\
&= 3 + (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots) = 3 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Nüüd võime leida 3-aadiliste arvude $\frac{1}{6} = 2,(1)$ ja $2\frac{1}{2} = 0,12(1)$ summa, vahe ja korrutise:

$$\begin{array}{r} 2{,}1\ 1\ 1\ 1\ \ldots \\ +\ 0{,}1\ 2\ 1\ 1\ \ldots \\ \hline 2{,}2\ 0\ 0\ 0\ \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}1\ 1\ 1\ 1\ \ldots \\ -\ 0{,}1\ 2\ 1\ 1\ \ldots \\ \hline 2{,}0\ 2\ 2\ 2\ \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ldots \\ \times\ 0{,}1\ 2\ 1\ 1\ 1\ \ldots \\ \hline 0{,}0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\ 2{,}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ldots \\ 0{,}1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\ 0{,}0\ 2\ 1\ 1\ 1\ \ldots \\ 0{,}0\ 0\ 2\ 1\ 1\ \ldots \\ 0{,}0\ 0\ 0\ 2\ 1\ \ldots \\ \hline 2{,}2\ 0\ 2\ 0\ 2\ \ldots \end{array}$$

Kontrolli mõttes võime saadud tulemused

$2,(1)+0,12(1) = 2,2;\ \ 2,(1)-0,12(1) = 2,0(2)$ ja $2,(1)\cdot 0,12(1) = 2,(20)$

tagasi ratsionaalarvudeks teisendada. Jällegi lemma 10.17 põhjal

$$1 + 9 + 9^2 + \ldots = \frac{1}{1-9} = -\frac{1}{8}. \tag{2}$$

Võrduste (1) ja (2) abil saame nüüd, et

$$2,2 \;=\; \frac{2}{3} + \underline{2}\cdot 1 = \frac{2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3} = \frac{1}{6} + 2\frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} 2,0(2) &= \frac{2}{3} + \underline{0}\cdot 1 + \underline{2}\cdot 3 + \underline{2}\cdot 3^2 + \underline{2}\cdot 3^3 + \underline{2}\cdot 3^4 + \ldots \\ &= \frac{2}{3} + 2\cdot 3\cdot(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots) \\ &= \frac{2}{3} + 6\cdot(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3} - 3 = -2\frac{1}{3} = \frac{1}{6} - 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} 2,(20) &= \frac{2}{3} + \underline{2}\cdot 1 + \underline{0}\cdot 3 + \underline{2}\cdot 3^2 + \underline{0}\cdot 3^3 + \underline{2}\cdot 3^4 + \ldots \\ &= \frac{2}{3} + 2\cdot(1 + 9 + 9^2 + \ldots) = \frac{2}{3} + 2\cdot(-\frac{1}{8}) = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12} = \frac{1}{6}\cdot 2\frac{1}{2}. \end{aligned}$$