Kevad 2015

Arvuteooria 14. praktikumi ülesanded:

Ruutjäägid II.

1. Leida Jacobi sümboli $\left(\frac{6791}{3567}\right)$ väärtus.

2. Olgu $n > 3$ paaritu naturaalarv. Leida Jacobi sümboli $\left(\frac{n^3}{n-2}\right)$ väärtus.

3. Leida Gaussi ruutvastavusseaduse abil kõik algarvud p, mille järgi -7 on ruutjääk.

4. Teha kindlaks, kas järgmine ruutkongruents on lahenduv:
a) $x^2 \equiv 172 \pmod{217}$, b) $2x^2 + 16x - 680 \equiv 0 \pmod{271}$.

5. Olgu a täisarv ja n naturaalarv, kusjuures $n \equiv 5 \pmod 8$. Tõestada, et kui $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$, siis kongruents $x^2 + 2(a + x) + 1 \equiv 0 \pmod n$ ei ole lahenduv. Kas kehtib ka vastupidine väide?

6. Olgu $p \equiv 1 \pmod 4$ algarv. Tõestada, et arv p jagab kõigi erinevate ruutjääkide summat mooduli p järgi, st.

$$\sum_{\substack{k=1, \\ \left(\frac{k}{p}\right)=1}}^{p-1} k \equiv 0 \pmod p.$$

7. Olgu a ja b naturaalarvud. Tõestada, et aritmeetiline jada $(a + kb)_{k=1}^{\infty}$ sisaldab lõpmata palju täisruute parajasti siis, kui a on ruutjääk mooduli b järgi.

8. Tõestada, et leidub lõpmata palju algarve kujul $5k + 4$.

9*. Olgu $p > 2$ algarv, n naturaalarv ja $(p, n) = 1$. Leida $\sum\limits_{i=1}^{p} \left(\frac{i^2+n}{p}\right)$.

10**. Olgu a täisarv ja $p > 2$ algarv. Leida kongruentsi

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2axyz \pmod p$$

lahendite (x, y, z) arv.

Ajapäevik: 14. nädal

Aeg	Tegevus	Kommentaarid