Kevad 2015

Märkusi arvuteooria 1. praktikumi kohta:

A. Hoolimata vaid kahepäevasest tähtajast olid päris paljud kuulajad ülesandeid lahendanud. See on väga tore ja loodetavasti läheb edaspidi veel paremini.

B. Kommentaare ülesannete kaupa:

3. Siin oli alamülesanne, et kahe järjestikuse täisarvu korrutis on alati paarisarv, mis võis oma lihtsuses kahe silma vahele jääda. See tuli ka ära põhjendada, kasutades näiteks kahega jagamisel tekkivaid jääke.

4. Lahendamise käigus võisid mõned võrrandi

$$n^2 - 11n + 33 = m^2$$

lahendipaarid kaduma minna (neid on kokku neli: $(3,3), (3,-3), (8,3)$ ja $(8,-3)$. Üks variant oli piirduda vaid mittenegatiivsete m väärtustega. Lisaks, tegurdusest

$$(2m - 2n + 11)(2m + 2n - 11) = 11$$

võrrandisüsteemide

$$\begin{cases} 2m - 2n + 11 = 11 \\ 2m + 2n - 11 = 1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 2m - 2n + 11 = 1 \\ 2m + 2n - 11 = 11 \end{cases}$$

saamisel on oluline märkida, et see kehtib 11 algarvuks oleku tõttu. Kordarvu korral oleks palju rohkem võimalusi.

5. Baasjuht $n = 1$ on lihtsalt kontrollitav ka ilma kõike välja arvutamata:

$$3^{3+3} - 26 - 27 = 27^2 - 27 - 26 = 27 \cdot 26 - 26 = 26^2 \vdots 13^2 = 169.$$

6. Üks lihtne ilma induktsioonita lahendus on selline:
Kuna

$$\frac{a}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6} = \frac{2a + 3a^2 + a^3}{6} = \frac{a(a+1)(a+2)}{6},$$

siis selle avaldise täisarvulisuse näitamiseks piisab sellest, et $6 \mid a(a+1)(a+2)$.

Kui a on paarisarv, siis $2 \mid a$ ja seega $2 \mid a(a+1)(a+2)$. Kui a on paaritu, siis $a+1$ on paaris ja $2 \mid a+1$ ning $2 \mid a(a+1)(a+2)$. Samamoodi, kui $a = 3l$, kus $l \in \mathbb{Z}$, siis $3 \mid a$ ja $3 \mid a(a+1)(a+2)$. Kui aga $a = 3l+1$ või $a = 3l+2$, siis vastavalt kas $3 \mid a+2$ või $3 \mid a+1$, kust jälle $3 \mid a(a+1)(a+2)$. Kokkuvõttes oleme saanud, et igal juhul $2 \mid a(a+1)(a+2)$ ja $3 \mid a(a+1)(a+2)$, seega $6 \mid a(a+1)(a+2)$ ja $\frac{a(a+1)(a+2)}{6} \in \mathbb{Z}$.

Paneme siinkohal tähele, et lahendusest tuli välja, et suvalise kolme järjestikuse täisarvu korrutis jagub kuuega, sest nende arvude seas on alati vähemalt üks paarisarv ja üks kolmega jaguv arv.

Induktsiooni kasutades tuli siin läbi teha nii sammud $n \mapsto n+1$ kui $n \mapsto n-1$ või taandada juht, kus $a < 0$ juhule $a \geq 0$ ja tõestada ainult viimane induktsiooni abil. Muidu jääb lahendus poolikuks, sest väide saab tõestatud vaid naturaalarvude jaoks.

7. Üks lihtne lahendus on selline:
Kuna kõik tsüklilised ümberpaigutused on saadavad arvust $\underline{abcdef}$ skeemi

$$\underline{abcdef} \to \underline{bcdefa} \to \underline{cdefab} \to \underline{defabc} \to \underline{efabcd} \to \underline{fabcde}$$

abil, siis piisab, kui me tõestame, et jaguvus arvuga 91 säilib igal sammul. Järelikult on meil vaja tõestada vaid seda, et kui arv $A := \underline{abcdef}$ jagub arvuga 37, siis ka arv $\underline{bcdefa}$ jagub arvuga 91. Avaldame

$$\underline{bcdefa} = \underline{abcdef0} + a - \underline{a000000} = 10A - 999999a.$$

Kuna $91 \mid A$ ja $91 \mid 999999$, siis $91 \mid 10A - 999999a = \underline{bcdefa}$.