

# Arvuteooria eksami näidisvariant

1. (10 p) Leida viiekohalise arvu  $xy357$  numbrid  $x$  ja  $y$  teades, et see arv jagub 99-ga. Kas selliseid arve võib olla mitu tükki?

2. (15 p) Lahendada kuupkongruents

$$x^3 + 3x + 4 \equiv 0 \pmod{189}.$$

(Vihje:  $189 = 7 \cdot 3^3$ .)

3. (10 p) Defineerida algarvu mõiste. Olgu  $p$  ja  $p + 4$  algarvud, kusjuures  $p > 3$ . Tõestada, et nende algarvude summa jagub kuuega.

4. (15 p) Defineerida ruutjäägi mõiste. Olgu  $p$  paaritu algarv ning  $a$  ja  $b$  täisarvud, kusjuures  $(a, p) = (b, p) = 1$ . Tõestada, et alljärgnevate kongruentside hulgas on alati paaritu arv lahenduvaid kongruentse:

$$x^2 \equiv a \pmod{p}, \quad x^2 \equiv b \pmod{p}, \quad x^2 \equiv ab \pmod{p}.$$

5. (20 p) Sõnastada ja tõestada Möbiuse inversioonivalem Euleri  $\varphi$ -funktsiooni jaoks.

6. (30 p) Olgu  $p$  paaritu algarv. Sõnastada ja tõestada teoreem algjuurte leidmisest mooduli  $p^2$  järgi, kui on teada mingi algjuur mooduli  $p$  järgi.