Kevad 2016

Arvuteooria 10. praktikumi ülesanded:

Algjuured I.

1. Leida elementide $\overline{7}$, $\overline{9}$, $\overline{11}$ ja $\overline{17}$ järgud rühmas $U(\mathbb{Z}_{18})$. Kas mõni arvudest $7, 9, 11$ või 17 on algjuur mooduli 18 järgi?

2. Olgu meil 78-st mängukaardist koosnev tarokikaartide pakk. Nummerdame kaardid ülemisest alumiseni numbritega $1, 2, \ldots, 78$. Võtame pakist ülemise poole ja asetame lauale alumisest poolest paremale. Moodustame uue kaardipaki, võttes järjest ülemisi kaarte vasakpoolsest ja parempoolsest pakist. Sellisel viisil kaardipaki segamist illustreerib järgmine tabel:

koht vanas pakis	1	2	3	...	39	40	41	42	43	...	78
koht uues pakis	2	4	6	...	78	1	3	5	7	...	77

.

Mitu korda peab pakki niimoodi segama, et kaardid oleksid jälle esialgses järjekorras?

3. Näidata otse, jäägiklassiringi $\mathbb{Z}_{20}$ elemente järjest astendades, et mooduli 20 järgi ei leidu algjuuri.

4. Leida kõik algjuured moodulite 13, 14, 15, 16 ja 18 järgi.

5. Olgu $p > 2$ algarv ja olgu $\overline{a}$ kolmandat järku element rühmas $U(\mathbb{Z}_p)$. Tõestada, et elemendi $\overline{a+1}$ järk on 6.

6. Tõestada, et suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral on arvu $n^4 + 1$ algtegurid kujul $8k + 1$.

7. Olgu $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ ja $(p-1, n) = 1$. Tõestada ilma konspekti alapeatüki 7.2 tulemusi otseselt kasutamata, et kongruents $x^n \equiv a \pmod{p}$ on üheselt lahenduv.

8. Kasutades fakti, et algarvulise mooduli järgi leidub alati algjuuri, tõestada *Wilsoni teoreem*, s.t. näidata, et kui p on algarv, siis

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

9*. Tõestada, et naturaalarv $n > 1$ on algarv parajasti siis, kui leidub selline naturaalarv a, et $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, aga $a^d \not\equiv 1 \pmod{n}$ kõigi arvu $n-1$ pärisjagajate d korral.

10**. Olgu p algarv ja olgu iga naturaalarvu i korral r_i jääk, mis tekib arvu i^i jagamisel arvuga p. Tõestada, et jada (r_i) on perioodiline ja leida selle perioodi minimaalne pikkus.

Ajapäevik: 10. nädal

Aeg	Tegevus	Kommentaarid