Kevad 2016

Märkusi arvuteooria 1. praktikumi kohta:

A. Isegi vaid kahepäevase etteteatamisajaga olid päris paljud kuulajad ilusasti ülesandeid lahendanud. Mind täiesti positiivselt üllatas mitmete lahendajate põhjalikkus ja samuti *-ülesannete populaarsus.

B. Kommentaare ja tüüpvigu ülesannete kaupa:

1. Praktikumis sai mainitud, et $7! - 2 = 5039 = 2 \cdot 11 \cdot 229$ algteguriteks lahutamisel on mõistlik näha, et 2 on algtegur ja faktoriaali tõttu 3,5 ja 7 ei ole algtegurid. Järgmine algteguri kandidaat 11 ongi algtegur ja arvuga $2 \cdot 22$ jagamisel saadav jagatis 229 on algarv. Viimast võib kontrollida mõne algarvude tabeli abil, aga ei ole keeruline seda ka ise teha, sest kui 229 on kordarv, siis üks tema algtegur on ülimalt $\sqrt{229}$, ja kuna $\sqrt{225} = 15$, siis ülimalt 13.

Praktikumis jäi mainimata ja ka kõigis nähtud lahendustes unustati ära jagajad $-1, -2, -11, -22, -229, -458, -2519$ ja -5038. Mõnikord jäeti põhjendamatult ära veel 1 ja 5038. See oleks õigustatud siis, kui küsitud oleks positiivseid *päris*jagajaid.

2. Vastus oli suhteliselt läbinähtavalt samuti neljapäev. Boonusena leidsime ära, et tegu on 19. augustiga 2021.

3. Siin võis kasutada induktsiooni või analüüsida, millised jäägid tekivad näiteks esimese arvu kolmega jagamisel. Kõige lihtsam viis vastuseni jõuda on aga umbes selline: olgu $n-1, n, n+1$ kolm järjestikust täisarvu. Siis

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 3n = 3n(n^2+2) = 3n(n^2-1+3) = 9n + 3n(n+1)(n-1).$$

Kuna üks kolmest järjestikusest täisarvust $n-1, n, n+1$ jagub alati kolmega (miks?), siis $3 \mid n(n+1)(n-1)$ ja

$$9 \mid 3n(n+1)(n-1) + 9n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3.$$

4. Kõige raskem oli siin induktsiooni sammu jaoks arv $(2^{3^n})^3 + 1$ avaldada $2^{3^n} + 1$ kaudu. Üks viis on astendada:

$$(\underline{2^{3^n} + 1})^3 = \underline{\underline{(2^{3^n})^3 + 1}} + 3 \cdot 2^{3^n}(\underline{2^{3^n} + 1}).$$

Kirjalikes lahendustes esines selline viga, kus arvati, et juhul kui $3^{k+1} \mid 2^{3^k}+1$, siis ka $3^{k+1} \mid (2^{3^k})^3 + 1$. Tänu liidetavale $+1$ nii lihtsalt arutleda ei saa.

5. Selle ülesandega probleeme ei olnud.

6. Antud ülesannet on lihtne lahendada eelmise ülesande abil: kui mõni arvudest $55, 555, 5555, \ldots$ on täisruut, siis peab ta olema kujul $4k$ või $4k + 1$. Kuna tegu on paaritute arvudega, siis langeb esimene võimalus ära. Paneme tähele, et $55 \ldots 55 = 100 \cdot l + 55 = 4(25l + 13) + 3$ mingi $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jaoks, ehk kõik vaadeldavad arvud peale 5 annavad neljaga jagamisel jäägi 3. See ei ole eelneva põhjal täisruudu korral võimalik, järelikult ainus võimalik täisruudu kandidaat on 5, mis aga samuti ei ole täisruut.

Teine variant on arutleda selliselt: kui kui mõni arvudest $55, 555, 5555, \ldots$ on täisruut, siis jagub ta viiega, st $5 \mid 55 \ldots 55 = a^2$. Kuna 5 on algarv, siis ka $5 \mid a$ ja järelikult $25 \mid a^2$ ehk a^2 kaks viimast numbrit on $25, 50, 75$ või 00. Meie arvudel on need aga 5 või 55.

7. Mitmel veidi erineval viisil saab järeldada, et $n - 1 \mid 2$. Arvu 2 jagajad on ± 1 ja ± 2, seega $n \in \{-1, 0, 2, 3\}$. Mõned lahendajad jätsid jagajad -1 ja -2 ehk $n = 0$ ja $n = 1$ välja. Samuti tasub alati oma vastus üle kontrollida.

8. Lahendamisel jäi mõnikord puudulikuks selle põhjendamine, kuidas leiti igal ringil juba varem maha tõmmatud arvude uuesti mahatõmbamiste arv. Sellest probleemist on lihtne üle saada nii: nummerdame arvud ümber nullist 369-ni. Siis esimesel ringil tõmmatakse maha kõik viiega jaguvad arvud ja teisel kuni viiendal ringil (sest kaheksaste sammudega tekib igal ringil kahearvuline erinevus täisringist) kõik paarisarvud. Alles jäävad seega paaritud arvud (pool kõigist), millest on välja arvatud iga viies (kümnendik kõigist), ehk kokku neli kümnendikku koguarvust. Seega maha tõmbamata jääb $370 * 0,4 = 148$ arvu.

Nii mõnigi lahendaja kasutas arvutustehnika abi. See ei ole keelatud ja on kontrolli mõttes isegi hea, aga alati tasub kõigepealt püüda ilma nö. toore jõuta hakkama saada.