Kevad 2016

Märkusi arvuteooria 2. praktikumi kohta:

A. Praktikumist osavõtuprotsent võiks olla parem. Viimase kasuteguritest on loengus juba juttu olnud.

B. Kommentaare ja tüüpvigu ülesannete kaupa:

1. Ebaefektiivne lahendusviis on algteguriteks lahutamine ja lause 1.20 rakendamine. Suurim ühistegur tuli Eukleidese algoritmi põhjal 3 ja seega

$$[2061, 3192] = \frac{2061 \cdot 3192}{3} = \frac{2061}{3} \cdot 3192 = 2192904.$$

2. Ei ole mõistlik suurimat ühistegurit mõista $\leq$ mõttes (nt. $2 \leq (4, 8)$ vs. $2 \mid (4, 8)$), sest see lähenemine toob tavaliselt kaasa lisatööd.

Ülesande lõppvastuseks oli kas 1 või 2, kusjuures ei ole raske näha, et $(a+b, a-b) = 1$ kui a ja b on erinevate paarsustega ning $(a+b, a-b) = 2$ kui a ja b on sama paarsusega.

3. Vihjes olnud fakti $(a, b) = (a, b-a)$ on meil hiljemgi hea kasutada, kuigi ülesannet sai lahendada ka Eukleidese algoritmi abil.

4. Üldiselt on hea kõigepealt püüda rakendada jaguvusseose omadusi ja alles selle lähenemise läbikukkumisel hakata jaguvuse definitsiooni lahti kirjutama. Antud ülesandes võis leida $d := (n!+1, (n+1)!+1) \mid n!+1$, $d \mid (n+1)!+1$, sellest $n!+1 = cd$, $(n+1)!+1 = ed$, $c, e \in \mathbb{Z}$, ja seejärel asendada

$$ed = (n+1)! + 1 = (n!+1)(n+1) - n = cd(n+1) - n.$$

Sealt $d(c(n+1) - e) = n$ ehk $d \mid n$. Samas palju lihtsam on puhtal jaguvusseose liitmisomaduse abil näha, et $d \mid (n+1)! + 1 - (n!+1)(n+1) = n$.

5. Erilahendit ei pea alati leidma Eukleidese algoritmi abil. Antud ülesandes oli lihtne näha kahte konkreetset varianti: 1008 kahepennist + 0 kroonist või 80 kroonist + 8 kahepennist.

6. Õige vastus: 11 kolme-reaalise-meest. Antud ülesannet sai lahendada ka ilma diofantilist võrrandit $8x + 9y = 803$ lahendamata, aga see meetod ei

tööta, kui me teame vaid piraatide umbkaudset arvu (nt. paarisarv, mitte üle 94). Seega tasub ikkagi leida üldlahend, näiteks

$$\begin{cases} x &= -803 + 9t \\ y &= 803 - 8t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}.$$

7. Idee oli üldjuhul olemas, aga selle põhjendus võis jääda segaseks. Korrektne lahendus:

Kuna $(a, b) = 1 \mid c$, siis on antud diofantilisel võrrandil olemas vähemalt üks lahendipaar x_0, y_0 ja üldlahend avaldub seega teoreemi 1.14 põhjal kujul

$$\begin{cases} x &= x_0 + bt \\ y &= y_0 - at \end{cases}.$$

Üldisust kitsendamata olgu $b < 0$ ja $a > 0$ (vastasel korral muutub vaid parameetrite t märk), siis tingimuse $0 > x = x_0 + bt$ rahuldamiseks peab kehtima $t > -\frac{x_0}{b}$. Kuna täisarvude hulk on ülalt tõkestamata, siis selline t_1 leidub. Analoogiliselt võime leida t_2 nii, et $t_2 > \frac{y_0}{a}$. Võttes nüüd $t > \max(t_1, t_2)$, kehtib $t > t_1 > -\frac{x_0}{b}$ ja $t > t_2 > \frac{y_0}{a}$ ehk $x = x_0 + bt < 0$ ja $y = y_0 - at < 0$. Tegelikult võib isegi välja arvutada t_1 ja t_2 minimaalsed vajalikud väärtused, aga see ei ole käesoleva lahenduse seisukohalt oluline.

8. Siin võis meelest ära minna kontroll, mis juhtub siis, kui $a = 1$ või $b = 1$. Lisaks tõestasid mitmed lahendajad sisuliselt implikatsiooni

$$[(a \mid b) \wedge (a^n \mid b^n)] \Longrightarrow a \mid b,$$

mis ei ole just päris see, mida ülesanne väidab.