Kevad 2018

Arvuteooria 14. praktikumi ülesanded:

Ruutjäägid II.

1. Leida Jacobi sümboli väärtus: a) $\left(\frac{827}{683}\right)$, b) $\left(\frac{951}{747}\right)$, c) $\left(\frac{7329}{4831}\right)$.

2. Tõestada Gaussi ruutvastavusseaduse abil, et -5 on ruutjääk parajasti nende algarvuliste moodulite järgi, mille üheliste ja kümneliste numbrite summa on paaritu.

3. Leida, mitu lahendit on järgmistel ruutkongruentsidel:
a) $x^2 \equiv 136 \pmod{247}$, b) $400x^2 - 8x + 18 \equiv 0 \pmod{302}$.

4. Olgu a täisarv ja n naturaalarv, kusjuures $n \equiv 1 \pmod 8$. Tõestada, et kui $\left(\frac{a}{n}\right) = -1$, siis kongruents $x^2 + 4a(x-2) + 4a^2 \equiv 0 \pmod n$ ei ole lahenduv. Kas kehtib ka vastupidine väide?

5. Leida kongruentsi $x^2 + 2y^2 + 4z^2 \equiv 0 \pmod{2017}$ lahendite arv.

6. Tõestada ilma Dirichlet' teoreemi kasutamata, et leidub lõpmata palju algarve kujul $12k + 1$.

7. Leida arvu $12^{(2^{15})} + 1$ vähim algtegur.

8. Tõestada, et kui $n > 1$ on paaritu, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, n) = 1$, siis kujutus $\lambda_a : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\lambda_a(\overline{x}) = \overline{ax}$, on permutatsioon, mis on paaris parajasti siis, kui $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$.

9*. Olgu $a_1, a_2 \ldots, a_{2018}$ sellised mittenegatiivsed täisarvud, et $\sum\limits_{i=1}^{2018} a_i^n$ on täisruut iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Leida, ülimalt mitu arvu a_i võivad nullist erineda ja tuua maksimaalse juhu kohta arvuline näide.

10**. Olgu $n > 2$ paaritu arv. Tõestada, et n on Fermat' algarv parajasti siis, kui algjuurte ja mitteruutjääkide hulgad mooduli n järgi langevad kokku.