Kevad 2018

Arvuteooria 4. praktikumi ülesanded:

Kongruentsi mõiste ja lihtsamad omadused.

1. Tõestada, et kui $ab + cd \equiv 0 \pmod{n}$, $a \equiv c \pmod{n}$ ja $(a, n) = 1$, siis $b + d \equiv 0 \pmod{n}$. Tuua näide, kus eeldus $(a, n) = 1$ ei ole täidetud ja seetõttu väide ei kehti.

2. Leida jääk, mis tekib arvu $(2018^{33} + 2019^{17})^7$ jagamisel arvuga 19.

3. Leida jäägid, mis saavad tekkida $20n^2 + 18$, $n \in \mathbb{N}$, jagamisel arvuga 24.

4. Tõestada, et kui täisarv a on korraga täisruut ja mõne teise täisarvu viies aste, siis $a \equiv 0, 1, 11, 34, 44, 45 \pmod{55}$.

5. Tõestada, et naturaalarvu kujul $8k + 7$ ei ole võimalik lahutada kolme täisruudu summaks.

6. Leida kõik naturaalarvud n, mille korral $2^n \equiv 2018 \pmod{22}$.

7. Röövelparun 2. praktikumi 7. ülesandest otsustas oma seni kirveste ja odadega varustatud meestele mõõgad osta. Neljal seersandil oli varasemast mõõk olemas ja need vajasid ainult pideme uuendamist, teistele tahtis parun hankida topeltsumma eest natuke kvaliteetsemad terariistad kui lihtröövlitele. Solingeni relvameistrid olid lahkelt nõus talle mõõku müüma ja 12 krossi eest ka uued mõõgapidemed tegema. Kui värsked tapariistad lossi jõudsid ja seppade esindaja arve välja võttis, siis selgus, et see oli vihma kätte jäänud ja loetav oli vaid “$x00y$ krossi”. Kui palju ühe seersandi mõõk maksis?

8. Arvud 200018 kuni 200999 kirjutatakse järjest üles. Kas niiviisi saadav täisarv

$$200018200019\ldots200998200999$$

jagub arvuga 7?

9*. Olgu $p > 2$ algarv. Leida $\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} \cdot \binom{p+i}{i}$ mooduli p^2 järgi.

10**. Tõestada, et mistahes naturaalarvu $n > 1$ korral

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{n\,\text{kahte}} \equiv \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{n-1\,\text{kahte}} \pmod{n}.$$