Kevad 2018

Arvuteooria 5. praktikumi ülesanded:

Jäägiklassiringid.

1. Koostada ringi $\mathbb{Z}_{18}$ korrutustabel.

2. Leida kõik ringi $\mathbb{Z}_{40}$ pööratavad elemendid.

3. Leida elementide $\overline{11}$, $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{16}$ ja $\overline{17}$ vastandelemendid ning (kui need on olemas) pöördelemendid ringis $\mathbb{Z}_{182}$.

4. Leida ringide $\mathbb{Z}_{24}$ ja $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$ kõik pööratavad elemendid ning kõik nulliteguridkoos vastavate nulli tegurdustega (st. nulliteguri a jaoks tuleb leida b nii, et $ab = 0$). Kas ringid $\mathbb{Z}_{24}$ ja $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$ on isomorfsed? Miks?

5. Leida ringi $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ kõik pööratavad elemendid. Kas ringid $\mathbb{Z}_{24}$ ja $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ on isomorfsed? Miks?

6. Elementi $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$ nimetatakse *nilpotentseks*, kui leidub arv $k \in \mathbb{N}$ nii, et $\overline{m}^k = \overline{0}$. Tõestada, et kõigi nilpotentsete elementide hulk M_n on $\mathbb{Z}_n$ alamring.

7. Leida jäägiklassiringi $\mathbb{Z}_n$ nilpotentsete elementide arv, st arv $|M_n|$.

8. Öeldakse, et nullist erinev mittepööratav element $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$ on *taandumatu*, kui võrdusest $\overline{m} = \overline{kl}$ järeldub, et kas $\overline{k} \in U(\mathbb{Z}_n)$ või $\overline{l} \in U(\mathbb{Z}_n)$. Tõestada, et jäägiklassiringi $\mathbb{Z}_n$ taandumatute elementide hulk on

$$\{\overline{m} \in \mathbb{Z}_n \mid \exists p \in \mathbb{P} : p^2 | n \wedge (m, n) = p\}.$$

9*. Vaatleme hulka $K_n := \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_n \mid (\overline{x})^{-1} = \overline{x}^3\}$. Leida arvu $|K_n|$ kõik võimalikud väärtused.

10*. Kui mitmel eri viisil on võimalik nulli teguriteks lahutada ringis $\mathbb{Z}_{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$? Tegurdused $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0} = \overline{b} \cdot \overline{a}$ loetakse erinevateks, kui $\overline{a} \neq \overline{b}$.