Arvuteooria 6. praktikum

Ülesande 7 näidislahendus

Ülesanne. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Tõestada, et

$$\sum_{d|n} \tau(d) \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right) = 1.$$

Lahendus. Ilmselt $n = 1$ korral $\sum\limits_{d|1} \tau(d) \cdot \mu\left(\frac{1}{d}\right) = \tau(1) \cdot \mu(1) = 1 \cdot 1 = 1$.

Olgu nüüd $n > 1$ ja esitame ta standardkujul $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$. Tähistame $m := p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$. Suvaline $d \mid n$ avaldub loengukonspekti lause 1.21 kohaselt kujul

$$d = p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{l_s},$$

kus $0 \leq l_i \leq k_i$ iga $i = 1, \ldots, s$ korral. Kui $d \mid n$, aga $d \nmid m$, siis leidub indeks $i_0 \in \{1, \ldots, s\}$ nii, et $l_{i_0} \geq 2$, st $p_{i_0}^2 \mid d$. Siit on selge, et sellisel juhul $\mu(d) = 0$ ja me võime vastava liidetava summast ära jätta. Paneme tähele, et $\{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n\} = \{\frac{n}{d} \in \mathbb{N} \mid d \mid n\}$ ja seega summad üle mõlema hulga on samad. Järelikult

$$\sum_{d|n} \tau(d) \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \tau\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \mu(d) = \sum_{d|m} \tau\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \mu(d).$$

Kui $d = p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{l_s}$, kus $d \mid m$ tõttu peavad kehtima võrratused $0 \leq l_i \leq 1$, siis loengukonspekti teoreemi 5.21 põhjal

$$\begin{aligned}
\tau\left(\frac{n}{d}\right) &= \tau\left(p_1^{k_1-l_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_1-l_s}\right) = (k_1 - l_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_s - l_s + 1) \\
&= (k_1 + 1) \cdot \left(\frac{k_1}{k_1 + 1}\right)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (k_s + 1) \cdot \left(\frac{k_s}{k_s + 1}\right)^{l_s} = \tau(n) \cdot \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{k_i}{k_i + 1}\right)^{l_i}.
\end{aligned}$$

Lisaks jälle tingimuse $0 \leq l_i \leq 1$ tõttu

$$\mu(p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{l_s}) = (-1)^{(l_1 + \ldots + l_s)}.$$

Kirjutame eelnevat kasutades summa uuesti välja:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{d|m} \tau\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \mu(d) \\
=&\tau(n) \cdot \Bigg(1 \cdot 1 - \frac{k_1}{k_1+1} - \ldots - \frac{k_s}{k_s+1} + \frac{k_1 k_2}{(k_1+1)(k_2+1)} + \ldots \\
&+ \frac{k_{s-1}k_s}{(k_{s-1}+1)(k_s+1)} - \ldots + (-1)^s \frac{k_1 \cdot \ldots \cdot k_s}{(k_1+1) \cdot \ldots \cdot (k_s+1)}\Bigg) \\
=&\tau(n) \cdot \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{k_i}{k_i+1}\right) = \tau(n) \cdot \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i+1} = \frac{\tau(n)}{\tau(n)} = 1.
\end{aligned}
$$

Märgime, et viimase rea esimene võrdus kehtib tänu teoreemi 5.21 osaga 2. analoogilisele arutluskäigule.