

# Arvuteooria eksami näidisvariant

1. (15 p) Kolm piraati ja laevapoiss on kõrtsist naasmisel leidnud väikese, reaaliste müntidega täidetud aardekirstu. Nad otsustavad aarde hommikul omavahel ära jagada ja lähevad ennast välja magama, aga panevad laevapoisi kirstu valvama. Öösel ärkab üks piraat üles ja otsustab ennast teiste piraatide ebaaususe vastu kindlustada. Ta avab kirstu, jagab aarde kolme ossa ja võab ühe osa endale. Seejuures jääb üks reaali üle, mille ta annab laevapoisile, et viimane teda ei reedaks. Teised kaks piraati tulevad öösel eri aegadel samale mõttele ja kogu protsess kordub kaks korda (ja laevapoiss saab veel kahe reaali võrra rikkamaks). Hommikul jagavad piraadid järelejäänud aarde uuesti kolmeks, igaüks võtab enda osa ja viimane ülejäänud münt antakse jälle laevapoisile. Milline on vähim reaalide arv, mille iga piraat viimase jagamise käigus saada võis?

2. (10 p) Leida kõik algarvud, mis erinevad ühe võrra mingi naturaalarvu kuubist.

3. (15 p) Defineerida täiuslik arv. Tõestada, et kui  $n$  on täiuslik, siis

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2.$$

4. (15 p) Sõnastada ja tõestada Fermat' väikese teoreemi järeldus, mis on aluseks Miller-Rabini algarvulisuse testile.

5. (25 p) Sõnastada ja tõestada Gaussi ruutvastavusseadus.