Kevad 2020

Arvuteooria 11. praktikumi ülesanded:

Algjuured II.

1. Leida kõik algjuured mooduli 41 järgi.

2. Teha kindlaks, kas mooduli n järgi leidub algjuuri ja kui leidub, siis leida nende arv ja üks algjuur, kui $a)\, n = 105$, $b)\, n = 106$, $c)\, n = 107$.

3. Teha kindlaks, kas mooduli n järgi leidub algjuuri ja kui leidub, siis leida nende arv ja üks algjuur, kui $a)\, n = 250$, $b)\, n = 252$, $c)\, n = 254$.

4. Olgu $p > 2$ algarv, $a \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ ja a^k algjuur mooduli p järgi. Tõestada, et ka a on algjuur mooduli p järgi.

5. Lahendada kongruents $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 \equiv 0 \pmod{41}$.

6. Olgu p algarv kujul $p = 2q + 1$, kus q on kahest suurem algarv. Näita, et kui a on naturaalarv vahemikus $1 < a < p-1$, siis $p - a^2$ on algjuur mooduli p järgi.

7. Tõestada, et mistahes paaritu $p \in \mathbb{P}$ korral leidub $1 < a < p$ nii, et a on korraga algjuur kõigi moodulite jaoks, mis on kujul p^k, $k \in \mathbb{N}$.

8. Olgu p algarv. Leida jääk, mis tekib kõigi algjuurte (mooduli p järgi) korrutise jagamisel arvuga p.

9*. Olgu $p > 2$ algarv ja $a \not\equiv 0, 1, -1 \pmod{p}$. Tõestada, et kongruentsil $a^x = 1 \pmod{p^x}$ on ainult lõplik arv lahendeid.

10**. Tõestada, et iga naturaalarvu n korral on jadas $1+n, 1+2n, 1+3n, \ldots$ lõpmata palju algarve.