Kevad 2020

# Arvuteooria 13. praktikumi ülesanded:

# Ruutjäägid I.

1. Leida otse, pööratavate elementide ruute järjest välja arvutades, kõik ruutjäägid mooduli 23 järgi.

2. Leida kõik ruutjäägid mooduli 19 järgi Euleri kriteeriumi abil.

3. Leida kõik ruutjäägid mooduli 29 järgi Legendre'i sümboli omaduste abil.

4. Millised järgmistest kongruentsidest on lahenduvad ja mitu lahendit neil on (kui üldse on):

a) $x^2 \equiv -1 \pmod{17}$; b) $x^2 \equiv 8 \pmod{19}$;
c) $x^2 \equiv -2 \pmod{2017}$; d) $x^2 \equiv -8 \pmod{2019}$;
e) $x^2 \equiv -2 \pmod{2018}$; f) $x^2 \equiv 19 \pmod{2020}$.

5. Leida kõik algarvud $p$, mille korral $-18$ on ruutjääk mooduli $p$ järgi.

6. Olgu $a, b \in \mathbb{N}$ ja vaatleme aritmeetilist jada $a + kb$, $k \in \mathbb{N}$. Leida piisav ja tarvilik tingimus selleks, et antud jada sisaldaks lõpmata palju täisruute.

7. Tõestada, et iga algarvu $p > 2$ korral leiduvad $x, y \in \mathbb{Z}$ nii, et

$$-1 \equiv x^2 + y^2 \pmod{p}.$$

8. Olgu $p > 5$ algarv. Tõestada, et leiduvad sellised täisarvud $k$ ja $l$, et $k$ ja $k + 1$ on mõlemad ruutjäägid ning $l$ ja $l + 1$ on mõlemad mitteruutjäägid mooduli $p$ järgi.

9*. Olgu $p > 2$ algarv. Leida, mitu ruutjääki $a$ mooduli $p$ järgi on sellised, et ka $a - 1$ on ruutjääk.

10**. Tõestada, et arvul $2^{3^n} + 1$ on vähemalt $n$ erinevat algtegurit kujul $8k + 3$.