Arvuteooria

Näidislahendused

Praktikum 4

7. ülesanne

Rasmus Born

On teada, et $\underline{12xyz7}_{10}$ jagub 99-ga, kus $\underline{12xyz7}_{10}$ tähistab arvu kümnendsüsteemis, $0 \leq x, y, z \leq 9$. Leida on tarvis (suurimast alustades) suuruselt kolmas sobiv arv $\underline{12xyz7}_{10}$. Et $\underline{12xyz7}_{10} \vdots 99$, järelikult $\underline{12xyz7}_{10} \vdots 9$ ja $\underline{12xyz7}_{10} \vdots 11$. Jaguvustunnuste alusel

$$\begin{aligned} 1+2+x+y+z+7 &\equiv 0 \pmod 9, \\ -1+2-x+y-z+7 &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Pärast lihtsustamist

$$\begin{aligned} x+y+z &\equiv 8 \pmod 9, \\ -x+y-z &\equiv 3 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Kasutades omadust $a \equiv b \pmod n \iff ka \equiv kb \pmod{kn}$, $k \neq 0$, saame

$$\begin{aligned} 11x+11y+11z \equiv 88 &\equiv -11 \pmod{99}, \\ -9x+9y-9z &\equiv 27 \pmod{99}. \end{aligned}$$

Kokku liites $(2x+20y+2z) \equiv 16 \pmod{99}$ ehk

$$x+10y+z \equiv 8 \pmod{99}.$$

Arvestades, et $0 \leq x, y, z \leq 9$, on seega täpselt kaks võimalust: kas $y = 9$ või $y = 0$.

$\underline{y=9}$	$\underline{y=0}$
$x-9+z \equiv 8 \pmod{99}$	$x+z \equiv 8 \pmod{99}$
$x+z=17$	$x+z=8$
Võimalused	Võimalused
$x = 8, \quad z = 9$	$x = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$
$x = 9, \quad z = 8$	$z = 8,7,6,5,4,3,2,1,0$

Kolm suurimat arvu on seega 129987, 128997 ja meie otsitav 128007.

8. ülesanne

Rasmus Born

Kui ritta on kirjutatud arvud 200 019 kuni 202 020, kas selliselt saadud arv

$$A \coloneqq 200\,019\,200\,020 \ldots 202\,019\,202\,020$$

jagub 7-ga? Vastus on jaatav, aga tõestame, et see nii tõepoolest on. Selleks kasutame abitulemust.

Lemma. *Arv* $a \coloneqq \underline{a_n \ldots a_0}_{10}$ $(0 \leq a_0, \ldots, a_n \leq 9,\ a_n \neq 0)$ *jagub 7-ga parajasti siis, kui tagantpoolt moodustatud kolmeste plokkide vahelduvate märkidega ristsumma (tähis* $\mathcal{V}_3(a)$*) jagub 7-ga.*

Tõestus. Kirjutame üles a astmete 10^{3k} kaupa, $k \in \mathbb{N}_0$. Näiteks kui $a \coloneqq 98\,838\,936$, siis saame $a = 936 + 838 \cdot 10^3 + 098 \cdot 10^6$, kus samastame $098 = 98$. Nõnda saame kirja panna kõik naturaalarvud (vajadusel arvule vasakule nulle juurde lisades). Samal ajal $10^3 \equiv -1 \pmod 7$, seega alati $a \equiv \mathcal{V}_3(a) \pmod 7$ ehk a jagubki 7-ga parajasti siis, kui $7 \mid \mathcal{V}_3(a)$. $\square$

Asume rehkendama. Summa $\mathcal{V}_3(a)$ prefiksiks on $\mathcal{V}_3(a) = 020 - 202 + 019 - 202 + \ldots$, see tähendab kokku liidetakse naturaaalarvud 0 kuni 20 ja sama palju kordi (s.o 21 korda) lahutatakse arvu 202. Seejärel liidetakse kokku naturaalarvud 0 kuni 999 ja sama palju kordi (ehk 1000 korda) lahutatakse arvu 201. Viimaks liidetakse kokku naturaalarvud 19 kuni 999 ja võrdpalju kordi arvu 200 (kokku 981 korda). Järelikult

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_3(a) = \quad & \sum_{i=1}^{20} i - 21 \cdot (202) + \\
& + \sum_{i=1}^{999} i - 1000 \cdot (201) + \\
& + \sum_{i=19}^{999} i - 981 \cdot (200).
\end{aligned}$$

Teades, et $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}$, $N \in \mathbb{N}_+$, saame edasi arvutada.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_3(a) = \quad & \frac{20(21)}{2} - 21 \cdot (202) + \\
& + \frac{999(1000)}{2} - 1000 \cdot (201) + \\
& + \left(\frac{999(1000)}{2} - \frac{18(19)}{2} \right) - 981 \cdot (200)
\end{aligned}$$

Lihtsustame mooduli 7 alusel edasi. Esiteks märgime, et $21 \equiv 0 \pmod 7$. Teiseks $1000 \equiv -1 \pmod 7$. Kolmandaks $981 \equiv 1 \pmod 7$ ja $200 \equiv 4 \pmod 7$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_3(a) \equiv \quad & 0 - 0 + \\
& + 5 \cdot (-1) + 1 \cdot (5) + \\
& + 0 - 3 \cdot 5 - 1 \cdot (4) \equiv \\
\equiv & -3 - 4 \equiv 0 \pmod 7
\end{aligned}$$

Tulemus on tõestatud. Vahetu kontroll Pythoniga kinnitab tulemust.

```
arv = ""
for i in range(200019, 202021):
arv += str(i)
print(int(arv) % 7)
```