Sügis 2018

Kõrgema matemaatika 2. kontrolltöö tagasiside

Üle 20 punkti kogus tervelt viis üliõpilast: Robert Johannes Sarap, Enely Ernits, August Luure, Urmi Tari ja Miriam Nurm. Ka teistel oli **edasiminek** võrreldes esimese kontrolltööga täiesti olemas nii keskmises punktisummas kui ülesannete sisulises lahendamises.

Tuleb siiski märkida, et osaliselt tänu hindamisjuhendi omapäradele olid töö eest saadud punktid mõnevõrra **infleeritud** võrreldes reaalsete lahenduskäikude täielikkusega. Seega suhteliselt kõrge punktisumma ei tähenda kahjuks automaatselt seda, et te ülesannetest sama suure osa tervenisti ära lahendasite.

Arvutus**vigade** eest võeti töös maha suurusjärgus **10%** punktidest, sealjuures üheainsa vea eest tavaliselt vaid 0,1 punkti.

Nüüd täpsemalt lahendustest ja tüüpvigadest.

Ülesanne 1. Terve töö konkurentsitult kõige **halvemini** lahendatud ülesanne. Funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{e^x - 1}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

kui **põhiliste** elementaarfunktsioonide liitfunktsioon **on pidev** oma määramispiirkonnas $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ja punktis $x = 0$ on katkevus otsesõnu kõrvaldatud, sest

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = 1 = f(0).$$

Samas funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(4x)}{\tan(6x)}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

katkeb koguni 23-s kohas, nimelt siis kui $x = k \cdot \frac{\pi}{12}$, $k = -11, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 11$. Osa neist katkevustest on kõrvaldatavad, teised ei ole. Kõrvaldatav on ka katkevus punktis 0, sest

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{\tan(6x)} = \frac{2}{3}.$$

Samas $f(0) = 1 \neq \frac{2}{3}$, seega on funktsioon seal katkev ja **ei** saa järelikult tervenisti **pidev** olla.

Funktsiooni pidevuse uurimisel tasub esimese asjana kindlaks teha, **kus** te funktsiooni pidevust uurite. Kas terves määramispiirkonnas, mingis kindlas punktis või mõnes vaheapealses osahulgas. Ilma seda teadmata ja töösse **kirjutamata** on lahendamine ja lahenduse lugemine mõlemad suhteliselt probleemsed ettevõtmised.

Tüüpvigu:

- mõni lahendaja püüdis lihtsalt lahendusvõtete osi "matemaagiliselt" kirja pannes punkte teenida;
- funktsiooni pidevuse tõestamiseks ei piisa lihtsalt näitamisest, et
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$
mingi a korral, tuleb põhjendada ka seda, miks **ülejäänud** määramispiirkonna punktide korral funktsioon pidev on (nt. on elementaarfunktsioonide liitfunktsioon, ja tal ei ole mujal peale punkti a katkevusi nagu nulliga jagamine, negatiivse arvu logaritmimine jne);
- mõisted "elementaarfunktsioon" ja "**põhiline** elementaarfunktsioon" on veidi erinevad, nimelt on esimesed teistest moodustatud liitfunktsioonid;
- aeti segi $f(x)$ ja tema osafunktsioon, nt $\frac{\sin x}{e^x-1}$; kui teine neist **ei ole** pidev, **võib** esimene seda ikkagi olla;
- ei võrreldud mitte $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ja $f(a)$, vaid näiteks hoopis $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ja 0;
- leiti pidevust **abstraktses** punktis a, kuigi seda oli vaja teha punktis $a = 0$ (või $a = k \cdot \frac{\pi}{12}$);
- isegi suhteliselt lihtsate **piirväärtuste leidmine** ei olnud kõigil selge;
- **L'Hospitali** reegli kasutamise **lubatavust** tuleb alati põhjendada;
- muutuja x ei saa järsku "piirväärtuse alt **vabaneda**", nt
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} \neq \frac{1}{e^x - 1} \cdot \lim_{x\to 0} \sin x.$$

Ülesanne 2. Siin oli üllatavalt palju probleeme **liitfunktsiooni** tuletise leidmisega. **Õige** valem selleks on

$$(fgh)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Tüüpvigu:

- “reegel” $(fgh)'(x) = f'(g(h(x))) + g'(h(x)) + h'(x)$ **ei** kehti;
- $(fgh)'(x) = f'(g'(h'(x)))$ ja $(fg)'(x) = f'(g(x)) + f(g'(x))$ samuti mitte;
- **jagatise** tuletise valemis on lugejas **miinusmärk**;
- ka **tabelituletistega** ei olnud kõik veel päris hästi tuttavaks saanud;
- $(2x^2 + e^{-5x})' = 4x - 5e^{-5x}$, **mitte** $(4x + e^{-5x}) \cdot (-5)$;
- $\left(\frac{e^3}{3}\right)' = 0$, mitte e^2, $\frac{2e^3}{3}$ vms;
- **lihtsustamine** ja avaldiste **teisendamine** ei olnud täiesti selged;
- kehtib $\ln a + \ln b = \ln ab$, **mitte** $\ln(a+b) = \ln a \cdot \ln b$.

Ülesanne 3. Õige valem funktsiooni väärtuse **ligikaudseks** arvutamiseks on

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

See valem on kasulik vaid siis, kui Δx on suhteliselt **väike**. Enamjaolt osati seda teadmist rakendada päris ilusasti. Samas

- mõni leidis diferentsiaali Δx suhteliselt meelevaldselt, näiteks $x_0 = 1,2$ ja $f(x) = \ln x$ korral $\Delta x = e - 1,2$, mis **ei ole** enam eriti **väike** suurus;
- $(\sqrt[3]{(x)})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2)}}$, **mitte** $\frac{1}{3x^{0,7}}$, $x^{\frac{4}{3}}$ vms;
- üldiselt **ei** kehti **täpne** võrdus $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$;
- **arvutusvigu** esines palju, sealhulgas mitmed arvasid ekslikult, et $\log_a 1 = a$ (õige on $\log_a 1 = 0$).

Ülesanne 4. Kõige rohkem täispunktidele lahendatud ülesanne.

Funktsiooni $f(x)$ **globaalsete** ekstreemumite leidmiseks piisab leida kõik **kriitilised** punktid (seal kas $f'(x) = 0$ või tuletist üldse ei eksisteeri), määramispiirkonna piirpunktid (tüüpiliselt lõigu **otspunktid**) ja arvutada kõigi nende argumentide korral $f(x)$ **väärtus** välja. Suurim tulemus ongi globaalne maksimum ja vähim globaalne miinimum. Teist tuletist $f''(x)$ ei ole üleüldse vaja uurida.

See situatsioon muutub, kui on tarvis leida **lokaalseid** ekstreemumeid. Siis on teine tuletis väga oluline abivahend.

Tüüpvigu:

- lõigu **otspunktide** ignoreerimine;
- lõigu **otspunkti** ekstreemumi **tüübi** määramine teise **tuletise** abil;
- **lokaalse** ekstreemumi **globaalseks** lugemine;
- mõlema statsionaarse punkti ekstreemumiks arvestamine (üks asus vaadeldavast lõigust **väljaspool**);
- $f'(x)$ avaldise meelevaldne **läbijagamine**; viimast saab teha küll $f'(x)$ nullkohtade leidmisel, aga edaspidi näiteks $f''(x)$ arvutamisel on ikkagi vaja teada $f'(x)$ täpset avaldist;
- funktsiooni ekstremaalsete **väärtuste** $f(x_1)$, $f(x_2)$ jne välja arvutamata jätmine.

Ülesanne 5. Kuna ülesande lahenduseks oli joonis, siis jagunesid lahendused peamiselt kaheks: peaaegu täiesti õiged ja enamjaolt valed. Variandis T8a oli otsitav funktsioon graafiku kujult sarnane **paraboolile** $y = 2x - x^2$, variandis T8b aga paraboolile $y = x^2 - 2x$.

Tüüpvigu:

- jaotati graafik mitmele joonisele laiali; küsitud oli **ühteainsat** funktsiooni, mis kõigile tingimustele vastaks;
- **vahetati ära** graafiku kumerus ($f''(x) < 0$) ja nõgusus ($f''(x) > 0$) või kasvamine ($f'(x) > 0$) ja kahanemine ($f'(x) < 0$);
- **joonistati** graafik sedavõrd **lohakalt**, et tekkisid käänupunktid, uued kumeruspiirkonnad vmt.

Ülesanded 6&7. Mõlema integreerimisülesande vastust on väga lihtne **kontrollida**: võtta sellest tuletis ja vaadata, kas saate esialgse funktsiooni tagasi. Seda tasub enam-vähem alati teha.

Tüüpvigu:

- **integreerimiskonstant** peab võrrandisse tekkima nii pea, kui kõik integraalimärgid $\int$ on elimineeritud, mitte alles viimasel real (kui üldse!);
- **tabeliintegraalide** valesti leidmine, nt $\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{\ln x}$;
- $\int x^{-1}\,dx \neq x^{-1+1}$, see on tabelis ka spetsiaalselt kirjas;
- $\int \sin x\,dx = -\cos x$, mitte $\cos x$;
- tuletise võtmine ja integreerimine läksid mõnikord **vahetusse**, nt $(2x-1)' = \frac{2x^2}{2} - x$;
- kasutati summa **siinuse/koosinuse valemeid** tuletise/integraali võtmisel; nii saab teha, aga antud ülesannetes oli see võrdlemisi kohmakas ja aeganõudev protseduur, mille asemele sobis väga hästi diferentsiaali märgi alla viimine,
- jäeti 6. ülesandes **diferentsiaali märgi alla viimine** vahele ja saadi seetõttu poolik vastus;
- tehti vigu dx **asendamisel** du-ga nii diferentsiaali märgi alla viimisel kui ositi integreerimisel, tüüpiliselt kui näiteks $du = 3dx$, siis kolmega jagamise asemel kas korrutati või võetigi otse $du = dx$;
- "kaotati" ja "leiti" diferentsiaale dx ja du, nt kujul $\int f(x)$ või $\int f(x)\,dx\,du$;
- ka integreerimisel ei saa tundmatud "integraali märgi alt vabaneda", eriti siis, kui nad on vaid ajutiselt ümber nimetatud, nt
$$\int e^x(3x+2)\,dx = \int u(x)(3x+2)\,dx \neq u\int(3x+2)\,dx;$$
- **ositi** integreerimisel kasutati mitmesuguseid kummalisi **reegleid**, näiteks
$\int u(x)v'(x)\,dx \neq u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$,
$\int u(x)v'(x)\,dx \neq u(x)v(x) - \int u'(x)v'(x)\,dx$ jne;
- **ositi** integreerimisel tasub u ja v **valimisel** hoolikas olla, et te oma tööd lihtsustamise asemel hoopis keerulisemaks ei teeks, näiteks ei ole mõtet leida
$$\int (x\cdot\sin x)\;dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \int\left(\frac{x^2}{2}\cdot\cos x\right)\,dx;$$

- tehti **vigu** ositi integreerimisel ja jäeti samas **märkimata**, mis võeti $u(x)$ ja mis $v(x)$ rolli; niiviisi tegutsedes peate te kas vigu täiesti vältima või leppima suurema punktikaoga.