Sügis 2018

Kõrgema matemaatika 3. kontrolltöö tagasiside

Meeldiva üllatusena oli viimase töö keskmine hinne **kõrgem** eelmise kahe töö omast. Tervelt **40%** töö tegijatest said üle 20 punkti, punktisummalt parimatena Robert Johannes Sarap, Jana Põder ja Eva-Lotta Lubja.

Nagu ennegi, arvutus**vead** maksid suurusjärgus **10%** punktidest, ühe vea eest tavaliselt $-0,1$ punkti.

Nüüd täpsemalt lahendustest ja tüüpvigadest.

Ülesanne 1. Terve töö kõige **halvemini** lahendatud ülesanne. Näidislahendus: asendame $u = 5x - 1$, kust $x = \frac{u+1}{5}$, $du = 5dx$ ja $dx = \frac{du}{5}$:
(NB! u ja x rajad on erinevad!)

$$\int_{0,2}^{1} x\sqrt{5x-1}\,dx = \int_{0}^{4} \frac{u+1}{5} \cdot \sqrt{u}\,\frac{du}{5} = \frac{1}{25}\int_{0}^{4} \left(u^{3/2} + u^{1/2}\right)\,du$$
$$= \frac{1}{25}\left(\frac{2u^{5/2}}{5} + \frac{2u^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{1}{25}\left(\frac{2^6}{5} + \frac{2^4}{3}\right) = \frac{64 \cdot 3 + 16 \cdot 5}{25 \cdot 15}$$
$$= \frac{272}{375}.$$

Samamoodi

$$\int_{1}^{2} x\sqrt{3x-2}\,dx = \int_{1}^{4} \frac{u+2}{3} \cdot \sqrt{u}\,\frac{du}{3} = \frac{1}{9}\int_{1}^{4} \left(u^{3/2} + 2u^{1/2}\right)\,du$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{2u^{5/2}}{5} + \frac{4u^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{1}{9}\left(\frac{2^6}{5} + \frac{2^5}{3} - \frac{2}{5} - \frac{4}{3}\right)$$
$$= \frac{64 \cdot 3 + 32 \cdot 5 - 6 - 20}{9 \cdot 15} = \frac{326}{135}.$$

Tüüpvigu:

- püüti kasutada **ositi** integreerimist, mis tegelikult viis küll õige tulemuseni, aga see protsess oli keerulisem ja näitas, et kõik siiski ei oska ositi integreerida;

- jäeti **rajad** muutujavahetusel muutmata (see küll ei mõjutanud lõpptulemust, kui määramata integraal ikkagi vaid x funktsioonina leiti);
- jäeti ära diferentsiaalist tulenev **lisategur**; nt kui $dx = \frac{du}{3}$, siis leiti, et

$$\int x\sqrt{3x-2}\,dx = \int \left(\frac{u^{3/2}+2u^{1/2}}{3}\right) du;$$

- kasutati määramata integraali leidmiseks "valemit"

$$\int [f(x)\cdot g(x)]\,dx \neq \left(\int f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int g(x)\,dx\right);$$

- jäeti ära **diferentsiaali märk** dx/du, muutujavahetusel on eriti oluline teada, millise muutuja järgi parajasti integreeritakse;
- "integreeriti" meetodil $\int x\sqrt{u}\,du = x\int\sqrt{u}\,du$, kui $u(x)$ on muutuja x funktsioon;
- **teisendusvead**, nt $\sqrt{u} = u^{-2}$;
- mitmesugused **arvutusvead** (ainult kaks lahendajat jõudsid tegelikult õige vastuseni).

Ülesanne 2. Ka siin oli päris palju probleeme. Mõlemad päratud integraalid tegelikult **koondusid**, R10a variandis arvuks 8 ja R10b variandis arvuks $\frac{1}{3e}$.

Tüüpvigu (lisaks 1. ülesande omadele):

- erinevatest kohtadest $\lim\limits_{M\to\ldots}$ ärajätmine, halvimal juhul olukorrani $\ldots\Big|_1^\infty$ (konspektis/mustandis võib nii kirjutada, puhtandis mitte);
- mitmesugused probleemid määramata **integraali** leidmisel, nt

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^3}{3}+x};$$

- arvamus, et $\lim\limits_{M\to\infty} c\cdot\frac{M^k}{e^{M^3}} = \infty$, tegelikult on see **piirväärtus** 0, kuna eksponentfunktsioon kasvab kiiremini mistahes polünoomist;
- püüe **ositi** integreerida, mis viis mitmesuguste **mitte-elementaarsete** integraalideni (st nende algfunktsiooni jaoks ei ole "valemit"), nt $\int e^{-x^3}\,dx$.

Ülesanne 3. Kõige **paremini** lahendatud ülesanne. Levinumad pisivead olid unustamine, et $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ja $\ln 1 = 0$. Ühel lahendajal õnnestus leida ka veidi vale kujundi pindala (nimelt selle osa oma, mis kujundit ümbritsevas ruudus üle jääb).

Ülesanne 4. Selles ülesandes oli kahjuks R10a variant tunduvalt raskem, kui R10b oma. Esimest tuli leida **mitmes** osas, nt nii (variante oli teisigi):

$$V = \pi \int_0^2 [2^2 - 1^2]\, dx + \pi \int_2^4 \left[2^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right] dx = \pi \cdot \left(3x\Big|_0^2 + \left[4x - \frac{x^3}{12}\right]\Big|_2^4 \right)$$
$$= \pi \cdot \left(6 + 16 - \frac{64}{12} - 8 + \frac{8}{12}\right) = \frac{28}{3}\pi.$$

Teine oli lihtsalt

$$V = \pi \int_1^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\frac{\pi}{x}\Big|_1^3 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

Tüüpvigu:

- hoopis mingi **muu keha** ruumala leidmine, nt $\pi \int_2^4 \left(\frac{x}{2}\right) dx$ või $\pi \int_0^4 \left(2^2 - \frac{x}{2}\right) dx$;
- joonte $f(x)$ ja $g(x)$ vahele jääva pöördkeha ruumala leidmine valemiga

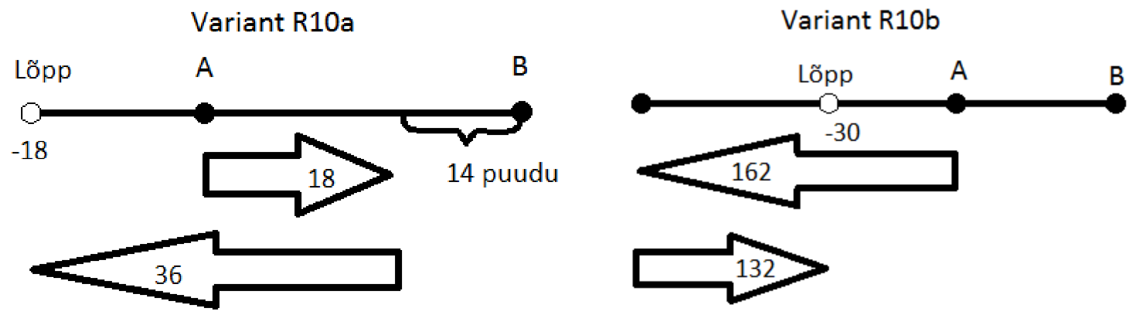
  $$V \neq \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx,$$

  tegelikult on siin tegu kahe pöördkeha ruumalade vahega, st

  $$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx;$$

- **teguri** π ärajätmine;
- väiksemad ebatäpsused **joonisel**.

Ülesanne 5. Selles ülesandes oli segadusi arusaamisega **liikumise** suunast ja läbitud kaugustest. Integreerimine iseenesest erilisi probleeme ei tekitanud. Piltlik ülevaade liikumistest:



Tüüpvigu:

- **absoluutväärtustega** liialdamine, nt. $\int |9-t^2|\,dx \neq |9t-\frac{t^3}{3}|$;
- isegi kui nihe Δs on negatiivne, loetakse **kaugust** alguspunktist positiivseks, st kauguseks on $|\Delta s|$;
- nihke, teepikkuse ja punktidevaheliste kauguste **segiajamine**, nt loeti mõnikord 3) alaküsimusele vastates nihet teepikkuseks, või nihke ja teepikkuse vahet/summat kauguseks punktist B, ja üritati sellega punkti B jõudmist/mittejõudmist põhjendada;
- üleüldse oli 3) alaküsimuse vastuse **põhjendamisega** muidki probleeme, nt. arvati, et kui teepikkus s ületab punktidevahelise kauguse, siis jõutakse punkti B küll;
- päris palju arvutusvigu.

Ülesanne 6. Samuti üldiselt hästi lahendatud ülesanne.

Tüüpvigu:

- tehti enda elu keerulisemaks vektorkorrutise koordinaatide ja sealt pikkuse leidmise asemel valemit $S_\Delta = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\angle(\vec{a},\vec{b}))$ kasutades;
- rööptahuka ruumala on $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, mitte
  - ✠ $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, mis võib olla negatiivne (kui näiteks ülesande sõnastuses kaks vektorit ära vahetada, siis nii juhtubki);
  - ✠ $\frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, mis on samadele vektoritele ehitatud **tetraeedri** ruumala;
- segakorrutis $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ei ole sama, mis $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|$;
- sooritati tehteid, aga jäeti märkimata, milline tulemus vastuseks on.