Sügis 2018

Tüüpvigu kõrgema matemaatika 9. tunnikontrollis

Eelviimases tunnikontrollis saavutas **parima** tulemuse Robert Johannes Sarap, kellele seekord sekundeeris Agneta Miilimäe. Keskmine punktisumma on millegipärast juba kolmandat korda järjest peaaegu sama...

Variant T8a, ülesanne 1. Polaarkoordinaatides antud kõversektori pindala arvutatakse **valemiga**

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_a^b r^2(\theta)\,d\theta.$$

Valemit ülesandes toodud joontele **rakendades** saame tulemuseks

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \theta^2\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^3}{3}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{48}.$$

Täispunkte andvaks **vastuseks** piisas juba avaldisest $\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\theta^2\,d\theta$.

Tüüpvigu:

- kasutati mitmesuguseid teisi mittesobivaid valemeid, sealhulgas
  - ⋆ $S = \frac{1}{2}\int\limits_a^b r(\theta)\,d\theta$ (puudu ruutuvõtmine),
  - ⋆ $S = \int\limits_a^b r^2(\theta)$ (puudu tegur $\frac{1}{2}$ ja diferentsiaali märk),
  - ⋆ $S = \int\limits_b^a r^2(\theta)\,d\theta$ (puudu tegur $\frac{1}{2}$, rajad valepidi),
  - ⋆ $S = \pi\int\limits_a^b r(b)\,d\theta$ (tegur $\frac{1}{2}$ asendatud teguriga π, puudu ruutuvõtmine),
  - ⋆ $S = \pi\int r^2(b)\,d\theta$ ($\frac{1}{2}$ asendatud teguriga π, määramata integraal),
  - ⋆ $S = \sqrt{\theta^2 + 1 + (\frac{\pi}{2})^2}$ (kaare pikkuse valemi omakorda vale versioon).

Variant T8a, ülesanne 2. Ülesanne oli üldiselt hästi lahendatud. Näidislahendus:

$$\int_{-\infty}^{2} e^{-x/2}\,dx = \lim_{M\to-\infty}\int_{M}^{2} e^{-x/2}\,dx = \lim_{M\to-\infty}\left((-2)\cdot e^{-x/2}\Big|_{M}^{2}\right)$$
$$= \lim_{M\to-\infty}\left(\frac{-2}{e} - (-2)\cdot e^{-M/2}\right) = \lim_{M\to-\infty}\left(\frac{-2}{e} + 2e^{-M/2}\right)$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{-2}{e} + 2e^{N}\right) = \infty \quad \text{ehk integraal hajub.}$$

Tüüpvigu:

- ei osatud **integreerida**, nt arvati, et $\int e^{-x/2}dx = e^{-x/2}$;
- ei osatud leida **piirväärtust**, nt $\lim\limits_{M\to-\infty} \frac{1}{e^{M/2}} \neq 0$ (võrdus kehtiks, kui $M \to \infty$);
- kirjutati matemaatiliselt **mitte** täiesti **korrektseid** avaldisi, nt $-2e^{-x/2}\Big|_{-\infty}^{2}$ (mustandis võib nii teha küll);
- jäeti muutujat **vahetades rajad** muutmata, nt $\int\limits_{M}^{2} e^{-x/2}\,dx \neq \int\limits_{M}^{2} -2e^{u}\,du$ (õige on $\int\limits_{-M/2}^{-1} -2e^{u}\,du$),
- jäeti ära **diferentsiaal**i märk dx või määramata integraali korral integreerimis**konstant**.

Variant T8b, ülesanne 1. Valem **parameetriliste** võrranditega antud joone kaare pikkuse arvutamiseks on

$$S = \int_{a}^{b} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Valemit **rakendades** saame, et

$$S = \int_{0}^{1} \sqrt{(4t^3-1)^2 + (2t)^2}\,dt = \int_{0}^{1} \sqrt{(4t^3-1)^2 + 4t^2}\,dt.$$

Viimasele avaldisele vastav määramata integraal ei ole elementaarfunktsioon, seetõttu käsitsi, sh Newton-Leibnizi valemi abil edasi integreerida ei saa.

Tüüpvigu:

- jälle kasutati mitmeid alternatiivseid valemeid, sealhulgas
  - $\star$ $S = \int_a^b \sqrt{(x^2(t))' + (y^2(t))'}\,dt$ (tuletis ja ruutuvõtmine vahetatud, puudu dt),
  - $\star$ $S = \int_a^b \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\,dt$ (puudu tuletised),
  - $\star$ $S = \int_a^b \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ (puudu tuletised ja dt),
  - $\star$ $S = \int_a^b \left[x^2(t) + y^2(t)\right]dt$ (puudu tuletised ja ruutjuur),
  - $\star$ $S = \int_a^b \sqrt{1 + |(f'(x))^2|}$ (seda valemit saab kasutada ainult **ilmutatud** funktsiooni $y = f(x)$ korral, puudu dx, liigne absoluutväärtus),
  - $\star$ $S = \int_a^b \sqrt{|x'(t) - y'(t)|}\,dt$ (ruutude summa asemel vahe abs.-väärtus).

Variant T8b, ülesanne 2. Selle ülesandega oli juba rohkem raskusi. Näidislahendus:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty e^{-3x+4}\,dx &= \lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-3x+4}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot e^{-3x+4}\Big|_1^M\right]\\ &= \lim_{M\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot e^{-3M+4} - \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot e\right] = \frac{e}{3} + \lim_{M\to\infty}\frac{-e^{-3M+4}}{3}\\ &= \frac{e}{3} + \lim_{N\to\infty}\frac{-1}{3e^N} = \frac{e}{3} + 0 = \frac{e}{3}.\end{aligned}$$

Tüüpvigu: lisaks variandi T8a vigadele sooritati **tehteid lõpmatustega**, nt $-\frac{1}{3}\cdot(\infty - e^{-1})$. Iseenesest vale see ei ole, aga nii on kerge jõuda teheteni $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{-\infty}$ jne. Seetõttu aine vastutav õppejõud ei soosi niisuguseid kirjutisi. Vaadake variandi T8a näidislahendusest, kuidas selliseid olukordi vältida.