Kõrgem matemaatika I

Lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine

Ülesanne 3.6 f) Lahendage võrrandisüsteem Gaussi meetodil:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -1 \end{cases}.$$

Lahendus: Kirjutame välja lineaarvõrrandisüsteemi laiendatud maatriksi:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 7 & -1 \end{array}\right).$$

Viime maatriksi ridade elementaarteisenduste abil treppkujule:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 7 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -\text{II r} - \text{IV r} \\ -2\cdot\text{III r} \\ \\ -\text{III r} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -7 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -7 & 6 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{liigne} \\ \rightarrow \text{II r} \\ \rightarrow \text{I r} \\ \rightarrow \text{III r} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -8 & -7 & -6 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -7 & 6 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ -4\cdot\text{II r} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 32 & 21 & 30 & 0 \end{array}\right)$$

Siit on näha, et võrrandisüsteem on lahenduv, sest süsteemi maatriksi ja laiendatud maatriksi astakud on mõlemad võrdsed kolmega. Vabu tundmatuid on $5 - 3 = 2$ (tundmatute arv miinus astak ehk allesjäänud võrrandite arv). Treppkujust on näha, et vabadeks tundmatuteks sobivad hästi x_4 ja x_5.

Lahendi väljakirjutamiseks on kolm varianti:

A. Anda vabadele tundmatutele suvalised väärtused ja arvutada välja vastavad ülejäänud tundmatute väärtused, kasutades treppkujul olevale maatriksile vastavat lineaarvõrrandisüsteemi $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 3 \\ x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 1 \\ 32x_3 + 21x_4 + 30x_5 = 0 \end{cases}.$

Siit

$$\begin{cases} x_5 &= C_2, \\ x_4 &= C_1, \\ x_3 &= -\dfrac{21 \cdot C_1 + 30 \cdot C_2}{32}, \\ x_2 &= 1 - 8 \cdot \left(-\dfrac{21 \cdot C_1 + 30 \cdot C_2}{32} \right) - 7 \cdot C_1 - 6 \cdot C_2 \\ &= \dfrac{4 - 7 \cdot C_1 + 6 \cdot C_2}{4}, \\ x_1 &= 3 - 2 \left(\dfrac{4 - 7 \cdot C_1 + 6 \cdot C_2}{4} \right) - 3 \left(-\dfrac{21 \cdot C_1 + 30 \cdot C_2}{32} \right) - 4 \cdot C_1 - C_2 \\ &= \dfrac{32 + 47 \cdot C_1 - 38 \cdot C_2}{32}, \qquad \text{kus } \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

B. Teisendada ridade elementaarteisenduste abil edasi, kuni maatriksis on kõigi "trepiastmete" kohal samuti nullid:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 32 & 21 & 30 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \cdot \text{II r} \\ -\frac{1}{4} \cdot \text{III r} \\ \cdot \frac{1}{32} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -13 & -10 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{6}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{32} & \frac{30}{32} & 0 \end{array}\right) +13 \cdot \text{III r}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{47}{32} & \frac{38}{32} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{6}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{32} & \frac{30}{32} & 0 \end{array}\right)$$

Siit on juba lihtne lahendeid otse välja kirjutada:

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{32 + 47 \cdot C_1 - 38 \cdot C_2}{32}, \\ x_2 &= \dfrac{4 - 7 \cdot C_1 + 6 \cdot C_2}{4}, \\ x_3 &= -\dfrac{21 \cdot C_1 + 30 \cdot C_2}{32}, \\ x_4 &= C_1, \\ x_5 &= C_2, \quad \text{kus } \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

C. Kasutada vastava *homogeense* lineaarvõrrandisüsteemi treppkujul olevat maatriksit

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 21 & 30 & 0 \end{array}\right)$$

ja sobivalt valitud regulaarset (st determinant ei ole 0) $v \times v$ ruutmaatriksit V, kus v on vabade tundmatute arv. Eelmised kaks lahendusmeetodit vastavad ruutmaatriksile $V = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Maatriksi V elemendid valime nii, et $\det(V) \neq 0$ ja kui võtta vabade tundmatute x_4 ja x_5 väärtusi maatriksi V veergudest (st iga rida vastab osalisele lahendile), siis x_1, x_2 ja x_3 väärtusi on lihtne arvutada. Antud juhul sobib näiteks

$$V = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{3} \\ 8 & -\frac{20}{3} \end{pmatrix},$$

mis on valitud viimase võrrandi $32x_3 + 21x_4 + 30x_5 = 0$ lihtsaks lahendamiseks, sest niiviisi mõlemal juhul $x_3 = 1$. Ilmselt $\det(V) = \frac{40}{3} - \frac{8}{3} = \frac{32}{3} \neq 0$. Esimesest kahest võrrandist

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0,$$
$$x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 0$$

saab lihtsalt välja arvutada, et lahenditeks on

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \left\{ \left(\frac{59}{3}, 4, 1, -2, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{4}{3}, -24, 1, 8, -\frac{20}{3}\right) \right\}.$$

Nüüd leiame mingil viisil (kõige lihtsam, aga mitte alati efektiivsem meetod on võtta vabade tundmatute väärtusteks nullid ja kasutada treppkujul olevale maatriksile vastavaid võrrandeid) esialgse võrrandi erilahendi. Praegu on tõesti $x_4 = x_5 = 0$ korral lihtne leida, et ka $x_3 = 0$ ja $x_1 = x_2 = 1$. Lineaarvõrrandisüsteemi üldlahend on nüüd avaldatav kujul erilahend + lineaarkombinatsioon leitud homogeense lineaarvõrrandisüsteemi lahenditest, praegu

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 0, 0, 0) + C_3 \cdot \left(\frac{59}{3}, 4, 1, -2, \frac{1}{3}\right) + C_4 \cdot \left(-\frac{4}{3}, -24, 1, 8, -\frac{20}{3}\right), \text{ kus } C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Tasub tähele panna, et C_1 ja C_2 ning C_3 ja C_4 on üldiselt erinevad. Neid on võimalik üksteiseks teisendada ja niiviisi eri lahendikujude vahel liikuda, aga see ei ole eriti otstarbekas tegevus.

Vastus: Antud lineaarvõrrandisüsteemi üldlahend on

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{32 + 47 \cdot C_1 - 38 \cdot C_2}{32}, \\ x_2 &= \dfrac{4 - 7 \cdot C_1 + 6 \cdot C_2}{4}, \\ x_3 &= -\dfrac{21 \cdot C_1 + 30 \cdot C_2}{32}, \\ x_4 &= C_1, \\ x_5 &= C_2, \quad \text{kus} \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(alternatiivselt

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \left\{ \left(\frac{32 + 47 \cdot C_1 - 38 \cdot C_2}{32}, \frac{4 - 7 \cdot C_1 + 6 \cdot C_2}{4}, -\frac{21 \cdot C_1 + 30 \cdot C_2}{32}, C_1, C_2 \right) \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

või

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 0, 0, 0) + C_3 \cdot \left(\frac{59}{3}, 4, 1, -2, \frac{1}{3} \right) + C_4 \cdot \left(-\frac{4}{3}, -24, 1, 8, -\frac{20}{3} \right), \text{ kus } C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

(alternatiivselt

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \left\{ \left(\frac{3 + 59C_3 - 4C_4}{3}, 1 + 4C_3 - 24C_4, C_3 + C_4, -2C_3 + 8C_4, \frac{C_3 - 20C_4}{3} \right) \mid C_3, C_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$