# Kombinatoorika kordamisküsimused

## Sügis 2016

Eksamil tuleb lahendada kolm ülesannet (vähemalt üks neist on tõestusülesanne), defineerida vajalikud mõisted ning sõnastada ja tõestada kaks tulemust.

Ülesanded on analoogilised praktikumis lahendatud ülesannetega, mõisted ja tulemused kuuluvad alljärgnevasse loetellu.

Teoreemide sõnastamisel ja mõistete defineerimisel ei või abimaterjale kasutada (st. sõnastused ja definitsioonid tuleb varem ära anda, kui te tahate abivahendeid kasutada).

Materjalidena on lubatud kõik visuaalsed meediumid: õpik, muud raamatud, konspekt, elektroonilised märkmed, internetiotsing, isegi elektrooniline suhtlus. Selleks on aega maksimaalselt 10 minutit.

## III Kombinatoorne loendamine.

**Lause 3.1.1.** Olgu $M$ ja $N$ hulgad, $|M| = m \geq 0$, $|N| = n \geq 0$. Siis kujutusi $f : M \to N$ on kokku $n^m$ tükki.

**Lause 3.1.2.** Olgu $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. Igal $n$-elemendilisel hulgal on täpselt $2^n$ erinevat alamhulka.

**Lause 3.1.3.** Olgu $n \in \mathbb{N}$. Igal $n$-elemendilisel hulgal on täpselt $2^{n-1}$ paarisarvulise ja $2^{n-1}$ paarituarvulise võimsusega alamhulka.

**Lause 3.1.4.** Olgu $M$ ja $N$ hulgad, $|M| = m \geq 0$, $|N| = n \geq 0$. Siis injektiivseid kujutusi $f : M \to N$ on kokku $\prod\limits_{i=0}^{n-1}(m-i)$ tükki.

Permutatsioon. Tsükkel. Faktoriaal.

**Fakt 3.1.** Permutatsioone $n$-elemendilisest hulgast on täpselt $n!$ tükki.

Binoomkordaja. Sümbol $\binom{X}{k}$.

**Lause 3.3.2.** Igal lõplikul hulgal $X$ on täpselt $\binom{|X|}{k}$ $k$-elemendilist alamhulka: $\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$.

**Fakt 3.2.** Täisarv $m \geq 0$ on esitatav $r$ mittenegatiivse täisarvu summana $\binom{m+r-1}{r-1}$ eri viisil.

**Fakt 3.3.** Kui $0 \leq k \leq n \in \mathbb{Z}$, siis kehtib võrdus $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

**Fakt 3.4.** Kui $0 \leq k \leq n \in \mathbb{Z}$, siis kehtib võrdus

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

**Lause 3.3.4.** Kui $0 \leq n \in \mathbb{Z}$, siis kehtib võrdus

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Tähised $O(f(n))$, $o(f(n))$, $\Omega(f(n))$, $\Theta(f(n))$, $f \sim g$.

**Teoreem 3.5.5.** Kui $n \in \mathbb{N}$, siis kehtivad võrratused

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

**Fakt 3.5.** Kui $0 \leq k \leq n \in \mathbb{Z}$, siis kehtivad võrratused

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq n^k.$$

**Fakt 3.6.** Kui $0 \leq n \in \mathbb{Z}$, siis suurim binoomkordaja kujul $\binom{n}{k}$ on $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ja kehtivad võrratused

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n.$$

**Teoreem 3.7.2.** (elimineerimismeetod) Lõplike hulkade $A_1, A_2, \ldots, A_n$ korral kehtib võrdus

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

**Ülesanne 3.8.1.** (riidehoiutädi ülesanne) Kui riidehoiutädi jagab $n$ härrasmehe vahel $n$ silindrit juhuslikult ära, siis tõenäosus, et ükski härrasmees ei saa kätte enda silindrit, läheneb protsessis $n \to \infty$ arvule $\frac{1}{e} = 0.36787....$

## IV Graafid.

Lihtgraaf. Tipp, serv, naabertipud.

Suunatud lihtgraaf. Algustipp, lõpptipp.

Täisgraaf, tsükkel, ahel, lihtahel (üldiselt ja konkreetses graafis).

(Täielik) kahealuseline graaf, alused.

Graafide isomorfism.

**Fakt 4.1.** Mitteisomorfsete graafide arv tipuhulgal $T$, $|T| = n$, on vahemikus

$$\left[\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}, 2^{\binom{n}{2}}\right].$$

Alamgraaf, indutseeritud alamgraaf.

Sidus graaf, graafi sidusad komponendid

**Tähelepanek 4.2.2.** Graafi sidus komponent on sidus graaf. Graaf on sidus parajasti siis, kui tal on üks sidus komponent.

Tipudevaheline kaugus graafis. Naabrusmaatriks.

Tipu aste. Graafi skoor.

**Lause 4.3.1.** Graafi $G = (T, S)$ korral kehtib $\sum\limits_{t \in T} \deg_G(t) = 2|S|$.

**Järeldus 4.3.2.** Igas graafis on paarisarv paarituastmelisi tippe.

**Teoreem 4.3.3.** (Skooriteoreem) Olgu $D = (d_1, d_2, \ldots d_n)$, kus $1 < n \in \mathbb{N}$ ja $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ on mittenegatiivsed täisarvud. Tähistagu

$$D' = (d'_1, d'_2, \ldots, d'_{n-1}),$$

kus

$$d'_i = \begin{cases} d_i, & \text{kui } i < n - d_n, \\ d_i - 1, & \text{kui } i \geq n - d_n. \end{cases}$$

Siis $D$ on mingi graafi skoor parajasti siis, kui $D'$ on mingi graafi skoor.

Euleri ahel. Euleri graaf. Pool-Euleri graaf.

Hamiltoni tsükkel ja Hamiltoni ahel. Hamiltoni ja pool-Hamiltoni graaf.

**Teoreem 4.4.1.** (Euleri graafide kirjeldus) Graaf on Euleri graaf parajasti siis, kui ta on sidus ja kõigil tema tippudel on paarisarvuline aste.

**Lemma 4.4.2.** Kui graafi $G = (T, S)$ kõigil tippudel on paarisarvuline aste, siis servade hulka $S$ saab esitada lõikumatute hulkade ühendina $S = \bigsqcup_{i=1}^{n} S_i$, kus $S_i$ on mingi tsükli servade hulk.

Suunatud Euleri graaf. Suunatud ahel, tee, tsükkel (üldiselt ja konkreetses graafis).

Tipu sisend ja väljundaste. Suunatud graafi sümmetrisatsioon.

Suunatud graafi nõrk ja tugev sidusus.

**Lause 4.5.2.** Suunatud graaf on suunatud Euleri graaf parajasti siis, kui see on nõrgalt sidus ja iga tipu sisend- ja väljundaste on võrdsed.

**Lause 4.5.X.** Maksimaalne numbrite arv rattal, mille iga positsiooni saab tuvastada fikseeritud $k$ järjestikuse numbri lugemisega, on $2^k$.

De Bruijni graafid.

2-sidus graaf.

**Lemma 4.6.X** Iga 2-sidus graaf on sidus.

Tehted graafiga: serva eemaldamine, serva lisamine, tipu eemaldamine, serva poolitamine.

**Teoreem 4.6.3.** Graaf $G$ on sidus parajasti siis, kui iga tipupaari $t_1, t_2 \in T(G)$ korral leidub tsükkel graafis $G$, mis sisaldab tippe $t_1$ ja $t_2$.

**Tähelepanek 4.6.4.** Graaf $G$ on 2-sidus parajasti siis, kui suvaline temast serva poolitamise teel saadud graaf on 2-sidus.

**Teoreem 4.6.5.** (2-sidusate graafide moodustamine) Graaf $G$ on 2-sidus parajasti siis, kui ta on saadud graafist $K_3$ ("kolmnurgast") lõpliku arvu serva lisamise ja serva poolitamise tehete teel.

Ekstremaalne kolmnurgavaba graaf. Kahealuseline täisgraaf $K_{X,Y}$.

**Teoreem 4.7.1.** Kolmnurgavabas $n$ tipuga graafis on maksimaalselt $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ serva.

**Teoreem 4.7.2.** Iga ekstremaalne $n$ tipuga kolmnurgavaba graaf on isomorfne kahealuselise täisgraafiga $K_{\lfloor n/2 \rfloor, n-\lfloor n/2 \rfloor}$.

**Teoreem 4.7.3.** Olgu $G = (T, S)$ kolmnurgavaba graaf. Siis tipuhulk $T$ on esitatav lõikumatute alamhulkade ühendina $T = X \sqcup Y$ nii, et iga tipu $t \in T$ korral $d_G(t) \leq d_{K_{X,Y}}(t)$.

**Järeldus 4.7.X.** Teoreemist 4.7.3 järeldub teoreem 4.7.1.

Ekstremaalne $K_{r+1}$-vaba graaf. Turáni graaf $T_r(n)$.

**Lause 4.8.1.** Turáni graaf $T_r(n)$ on isomorfismi täpsuseni ainus maksimaalse servade arvuga $r$-aluseline $n$ tipuga graaf.

**Teoreem 4.8.2.** (nõrk Turáni teoreem) Igas $K_{r+1}$-vabas graafis on maksimaalselt $\left\lfloor \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{r}) \right\rfloor$ serva.

**Teoreem 4.8.3.** (tugev Turáni teoreem) Igas $K_{r+1}$-vabas graafis on maksimaalselt $|S(T_r(n))|$ serva. Maksimum saavutatakse siis ja ainult siis, kui $G \cong T_r(n)$.

# V Puud.

Puu. Leht.

**Teoreem 5.1.2.** Graafi $G = (T, S)$ jaoks on järgmised väited samaväärsed:

(1) $G$ on puu;

(2) iga tipupaari $t, t' \in T$ jaoks leidub graafis $G$ täpselt üks lihtahel tipust $t$ tippu $t'$;

(3) (minimaalne sidus graaf) $G$ on sidus graaf, millest suvalise serva eemaldamisel tekib mittesidus graaf;

(4) (maksimaalne tsükliteta graaf) $G$ on tsükliteta graaf ja suvalise serva $s \in \binom{T}{2} \setminus S$ lisamisel tekkiv graaf $G + s$ sisaldab tsüklit;

(5) (Euleri valem 1) $G$ on sidus graaf ja $|T| = |S| + 1$;

(6) (Euleri valem 2) $G$ on tsükliteta graaf ja $|T| = |S| + 1$.

**Lemma 5.1.3.** Iga vähemalt kahe tipuga puu sisaldab vähemalt kahte lehte.

**Lemma 5.1.4.** (puude kasvatamine) Olgu $G$ graaf ja $l$ selle leht. Siis $G$ on puu parajasti siis, kui $G - l$ on puu.

Juurega puu, järjestatud puu. Alam- ja ülemtipp.

Puude, juurega puude ja järjestatud puude isomorfismid.

**Lemma 5.2.X.** Olgu $P$ juurega puu, $j$ selle juur ja $t_1, \ldots, t_n$ viimase alamtipud. Vähim hulk, mis sisaldab tippu $t_i$ ja on kinnine alamtippude võtmise suhtes, on puu juurega $t_i$ (tipule $t_i$ vastav alampuu). Kui $f : P_1 \to P_2$ on juurega puude $(P_1, j_1)$ ja $(P_2, j_2)$ isomorfism, siis juure $j_1$ alamtippude $t_1, \ldots, t_n$ kujutised $f(t_1), \ldots, f(t_n)$ on juure $j_2$ alamtipud. Isomorfismi $f$ ahend tipule $t_i$ vastavale alampuule on juurega puude isomorfism tipule $f(t_i)$ vastava alampuuga.

**Fakt 5.2.Y.** Järjestatud puude koodid on üksüheses vastavuses järjestatud puude isomorfismiklassidega.

**Fakt 5.2.Z.** Juurega puude koodid on üksüheses vastavuses juurega puude isomorfismiklassidega.

Tipu ekstsentrilisus, graafi tsenter ja raadius.

**Lause 5.2.U.** Iga puu tsenter koosneb kas ühest või kahest tipust. Viimasel juhul on tegu naabertippudega.

**Lause 5.2.V.** (Juureta) puude koodid on üksüheses vastavuses (juureta) puude isomorfismiklassidega.

Graafi aluspuu.

**Algoritm 5.3.2.** Aluspuude leidmine servade tsüklivaba lisamise teel.

**Lause 5.3.3.** Kui sisendi $G = (T, S)$, $|T| = n$, $|S| = m$, korral on algoritmi 5.3.2 väljundiks $n - 1$ servaga graaf, siis on viimane graafi $G$ aluspuu. Kui väljundis on $k < n-1$ serva, siis $G$ on mittesidus $n-k$ sidusa komponendiga graaf.

**Algoritm 5.3.5.** Aluspuude leidmine aluspuu lehthaaval kasvatamise teel.

**Lause 5.3.6.** Kui sisendi $G = (T, S)$, $|T| = n$, $|S| = m$, korral on algoritmi 5.3.5 väljundiks $n$ tipuga graaf, siis on viimane graafi $G$ aluspuu. Vastasel korral on $G$ mittesidus ja väljundiks on algoritmi esimesel sammul fikseeritud tippu sisaldava sidusa komponendi aluspuu.

Graafi servade kaalud, kaalufunktsioon. Minimaalse kaaluga aluspuu.

**Ülesanne 5.4.1.** Minimaalse kaaluga aluspuu leidmise ülesanne.

**Algoritm 5.4.2.** Kruskali algoritm (ahne servade tsüklivaba lisamine).

**Lause 5.4.3.** Algoritm 5.4.2 lahendab ülesande 5.4.1.

## VII Topeltloendamine.

**Lause 7.1.1** (Tasandiline Sperneri lemma) Suvaline eelnevalt konstrueeritud märgendatud kolmnurk sisaldab kolmnurka, mille iga tipu märgend on erinev.

Funktsiooni püsipunkt.

**Lause 7.1.2** (Ühemõõtmeline püsipunktiteoreem) Iga pidev funktsioon $f : [0,1] \to [0,1]$ omab püsipunkti.

**Teoreem 7.1.3** (Tasandiline Brouweri püsipunktiteoreem) Iga pidev funktsioon $f : \Delta \to \Delta$ omab püsipunkti. (Tõestuseta.)

**Lause 7.1.4** Eelnevalt kirjeldatud nelinurksel laual mängitav mäng ei saa lõppeda viigiga.

(Lõpliku) hulga alamhulkade sõltumatu süsteem. Ahel. Antiahel.

**Teoreem 7.2.1** (Sperner) Iga $n$-elemendilise hulga mistahes sõltumatu alamhulkade süsteem sisaldab ülimalt $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ hulka.

(Ekstremaalne) $K_{2,2}$-vaba graaf.

**Teoreem 7.3.1** Mistahes $n$-tipuline $K_{2,2}$-vaba graaf sisaldab maksimaalselt $\frac{1}{2}(n\sqrt{n}+n)$ serva.

**Lause 7.3.2** (Cauchy-Schwartzi-Bunjakovski võrratus) Suvaliste $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrratus

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

## IX Lõplikud projektiivsed tasandid.

Lõplik projektiivne tasand. Selle interpretatsioon. Fano tasand.

**Lause 9.1.3** Olgu $(X, \mathcal{L})$ lõplik projektiivne tasand. Siis mistahes $L, L' \in \mathcal{L}$ korral $|L| = |L'|$.

Lõpliku projektiivse tasandi järk.

**Lause 9.1.5** Olgu $(X, \mathcal{L})$ $n$. järku lõplik projektiivne tasand. Siis

(1) iga punkt asub täpselt $n + 1$ erineval sirgel;

(2) $|X| = n^2 + n + 1$;

(3) $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$.

Lõpliku projektiivse tasandi intsidentsusgraaf. Heawoodi graaf.

Lõpliku projektiivse tasandi duaalne süsteem.

**Lause 9.1.X** Lõpliku projektiivse tasandi duaalne süsteem on lõplik projektiivne tasand.

Duaalne projektiivne tasand. Duaalsuspõhimõte.

**Teoreem 9.2.X** Iga naturaalarvu $n$ korral järeldub lõpliku $n$-elemendilise korpuse olemasolust $n$. järku lõpliku projektiivse tasandi olemasolu. (Tõestuseta.)

**Järeldus 9.2.Y** Mistahes algarvu $p$ ja naturaalarvu $k$ korral leidub $p^k$ järku lõplik projektiivne tasand.

**Teoreem 9.2.Z** Kui naturaalarv $n$ rahuldab tingimust $n \equiv 1, 2 \pmod 4$, siis lõplik $n$. järku projektiivne tasand saab leiduda vaid siis, kui $n$ on kahe naturaalarvu ruutude summa. (Tõestuseta.)

Ladina ruut. Ristuvad ladina ruudud.

**Teoreem 9.3.1** Olgu $M$ paarikaupa ristuvate $n$. järku ladina ruutude hulk. Siis $|M| \leq n - 1$.

**Teoreem 9.3.2** Mistahes $n \geq 2$ korral on $n$. järku projektiivse tasandi olemasolu samaväärne $n-1$ paarikaupa ristuva $n$. järku ladina ruudu olemasoluga. (Konstruktsiooni osa.)

Alamhulkade süsteemi 2-värvitavus.

**Teoreem 9.4.1** Lõmata paljude $m$ väärtuste korral leidub $m$ tipu ja vähemalt $0.35 \cdot \sqrt{m} \cdot m$ servaga $K_{2,2}$-vaba graaf.

## X Tõenäosuslik tõestamine.

**Näide 10.1.1** 52 kaarti 4 korda segades ei ole tulemus juhuslik.

**Lause 10.1.2** Leiduvad $n$ muutuja Boole'i funktsioonid, mida ei ole võimalik defineerida vähema kui $\frac{2^n}{\log_2(n+8)}$ sümbolist koosneva valemiga.

Mitte-2-värvitavuse arv $m(k)$.

**Teoreem 10.1.4** Kehtib $m(k) \geq 2^{k-1}$, st. iga $k$-elemendilistest hulkadest koosnev vähem kui $2^{k-1}$-elemendiline süsteem on 2-värvitav.

**Teoreem 10.1.5** Kehtib $m(3) \geq 7$.

**Järeldus 10.1.X** Kehtib $m(3) = 7$.

Lõplik tõenäosusruum. Elementaarsündmus. Sündmus ja selle tõenäosus.

Juhuslike kahendjadade ruum. Juhuslike permutatsioonide ruum. Juhuslike graafide ruum.

**Fakt 10.2.X** Kaartidele kirjutatud suurima numbri äraarvamise mängu jaoks leidub strateegia, mis võidab vähemalt 25% mängudest.

**Lause 10.2.5** Juhuslik graaf peaaegu kindlasti ei ole kahealuseline.

Paarikaupa sõltumatud sündmused. Mitmekaupa sõltumatud sündmused.

**Fakt 10.2.Y** Leidub vähemalt 91 mängijaga turniir, mille korral mistahes mängijate kolmik on kaotanud ühele ja samale neljandale mängijale.

Juhuslik suurus. Juhusliku suuruse keskväärtus. Sündmuse indikaator.

**Näide 10.3.2** Juhuslikus kahendjadas pikkusega $n$ on keskmiselt $\frac{n}{2}$ ühte.

**Tähelepanek 10.3.8** Mistahes sündmuse $A$ korral $\mathbf{E}[I_A] = P(A)$.

**Teoreem 10.3.9** (Keksväärtuse lineaarsus) Olgu $(X, \Omega)$ lõplik tõenäosusruum, $f, g$ juhuslikud suurused ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Siis

$$\mathbf{E}[\alpha \cdot f] = \alpha \cdot \mathbf{E}[f] \quad \text{ja} \quad \mathbf{E}[f + g] = \mathbf{E}[f] + \mathbf{E}[g].$$

**Näide 10.3.3** $n$ jahimehe ja $n$ jänese korral on keskmine ellujäävate jäneste arv $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{n}{e}$, protsessis $n \to \infty$.

**Teoreem 10.4.1** Olgu $G$ suvaline $2n$ tipu ja $m > 0$ servaga graaf. Siis selle graafi tipud saab jagada lõikumatuteks alamhulkadeks $T = A \sqcup B$ nii, et rohkem kui $\frac{m}{2}$ serva on tipuhulkade $A$ ja $B$ vahel.

Suurima sõltumatu tipuhulga võimsus $\alpha(G)$.

Klikk. Suurima kliki võimsus $\omega(G)$.

**Teoreem 10.4.2** (Turán) Mistahes $n$ tipu ja $m$ servaga graafi $G$ korral

$$\alpha(G) \geq \frac{n^2}{2m+n}.$$

## XI Ramsey teooria.

**Teoreem 11.1.1** Mistahes vähemalt 6-tipulise graafi $G$ korral kas $\alpha(G) \geq 3$ või $\omega(G) \geq 3$.

**Teoreem 11.2.1** (Ramsey teoreem graafide jaoks) Mistahes vähemalt $\binom{k+l-2}{k-1}$-tipulise graafi $G$ korral kas $\omega(G) \geq k$ või $\alpha(G) \geq l$.

Ramsey arvud $r(k,l)$ ja $r(k)$.

**Teoreem 11.3.1** Olgu $k$ ja $n$ naturaalarvud, mis rahuldavad tingimust $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$. Siis $r(k) > n$.

**Järeldus 11.3.2** Mistahes $k \geq 2$ korral $r(k) \geq (\sqrt{2})^k$.