Kombinatoorika.

Praktikum 11: Tõesnäosuslik tõestamine II.

1. (MN 10.3.5) Narva mnt. ühiselamute ja Maarjamõisa linnaku vahel pannakse käima ööpäevaringne bussiliin. Üliõpilane Juulius sõidab igal tööpäeval peale ülesärkamist bussiga õppetööle, aga ta ärkab üles täiesti juhuslikel kellaaegadel. Juuliuse andmetel tuleb tal bussi oodata keskmiselt 30 minutit, liinioperaator aga väidab, et keskmine ööpäevaringne bussiaegade vahe on 15 minutit. Kas leidub selline bussigraafik, et õigus oleks mõlemal poolel?

2. (MN 10.3.8) Leida oodatav ellujäävate jäneste arv näites 10.3.3, kui jahimehi on m ja jäneseid n tükki.

3. (MN 10.3.3) Leida juhusliku permutatsiooni oodatav püsipunktide arv.

4. (MN 10.3.6) Leida n järjestikuse mündiviske tulemusena tekkivate sama mündipoole perioodide oodatav arv. (Näiteks visete jadal ⓀⓀⒸⓀⒸⒸⒸⓀ on 5 perioodi.)

5. (MN 10.4.2) Tõestada, et kui $d_1, \ldots, d_n$ on mittenegatiivsed reaalarvud ja $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 1$, siis avaldise $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i+1}$ väärtus on minimaalne, kui $d_1 = \ldots = d_n = \frac{1}{n}$.

6. Tõestada, et teoreemi 10.4.2 väide $\alpha_G \geq \frac{n^2}{2\cdot|S|+n}$ on samaväärne Turáni teoreemi väitega "kui G on K_{t+1}-vaba, siis $|S| \leq (1-\frac{1}{t})\frac{n^2}{2}$".

7. ($\sim$MN 10.4.5) Vaatleme järgmist algoritmi: jaotada etteantud graafi G tipuhulk suvaliselt kaheks lõikumatuks alamhulgaks A ja B ning korrata järgmist sammu nii kaua, kui võimalik.
Samm: kui ühes hulkadest A või B leidub selline tipp, millel on rohkem naabreid selles hulgas, milles ta ise asub, siis viia see tipp üle teise hulka.
Tõestada, et antud algoritm alati peatub ja peale peatumist on vähemalt pooled servad tulemuseks olevate alamhulkade vahel.

8. (MN 10.4.7) Üksteise kõrvale on üles pandud n tühja ringikujujulist raami. Ringivaatleja istub ühel $n-1$ raamide vahelistest aladest ja juhuslikult valitud r raamile riputatakse kate. Tõestada, et vaatlejale nähtavate raamide arvu oodatav väärtus on ülimalt $\frac{2(n-r)}{r+1}$. (Vaatleja näeb läbi tühjade, aga mitte läbi kaetud raamide.)

9*. Olgu $m \in \mathbb{N}$ ja G juhuslik graaf, milles kahe tipu vahelise serva olemasolu tõenäosus on $p \in [0,1]$. Leida parameetri p suurim väärtus, mille korral graaf G peaaegu kindlasti ei sisalda tsüklit pikkusega m.