Sügis 2016

Kombinatoorika.

Praktikum 12: Ramsey teooria.

1. (MN 11.2.1) Tõestada, et iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et mistahes N-elemendilise hulga ja suvalise klassijaotuse $\binom{X}{2} = E_1 \sqcup E_2$ korral vähemalt üks graafidest (X, E_1) ja (X, E_2) sisaldab graafi K_n.

2. Tõestada, et mistahes $k, l \in \mathbb{N}$ korral leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et igas n-elemendilises jadas $a_1, \ldots, a_n$ leidub kas mittekahanev alamjada pikkusega k või mittekasvav alamjada pikkusega l.

3. (MN 11.2.2) Olgu suvalise graafi G korral $f(G) = \alpha(G) \cdot \omega(G)$. Defineerime kujutuse $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seosega $f(n) = \min\{f(G) \mid T(G) = n\}$. Tõestada, et $f(n) \geq n$, kui $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, aga $f(5) < 5$.

4. (MN 11.2.3) Tõestada, et eelmises ülesandes defineeritud kujutus f on mittekahanev ja ülalt tõkestamata.

5. (MN 11.2.4) Tõestada, et kui $k \leq k'$ ja $l \leq l'$, siis $r(k, l) \leq r(k', l')$.

6. (MN 11.3.1) Tõestada, et mistahes $k \geq 2$ korral $\sqrt{2} \leq \sqrt[k]{r(k)} \leq 4$.

7. (MN 11.3.2) Tõestada, et $r(k) \geq (k-1)^2$.

8. (MN 11.3.4) Tõestada, et $r(4) = 18$.

9*. (MN 11.2.5) Tõestada, et mistahes naturaalarvude p, r, n jaoks leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et kehtib järgmine väide.
Väide: iga vähemalt N-elemendilise hulga X ja hulga $\binom{X}{p}$ mistahes klassijaotuse $\binom{X}{p} = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_r$ jaoks leidub selline n-elemendiline alamhulk $Y \subseteq X$, et $\binom{Y}{p} \subseteq A_i$ mingi $i \in \{1, \ldots, r\}$ korral.