Sügis 2016

Kombinatoorika.

Praktikum 4: Graafid II.

1. (MN 4.4.6) Leida piisav ja tarvilik tingimus selleks, et mittenegatiivsete täisarvude jada saaks olla silmuste ja kordsete servadega graafi skooriks.

2. (MN 4.5.3) Millistel tingimustel saab suunatud graafi joonistada ühe (mitte tingimata kinnise) joonega, mis läbib kõiki servi täpselt üks kord nende orientatsioonile vastavas suunas?

3. (MN 4.5.9) *Turniiriks* nimetatakse suunatud graafi, milles iga tipupaari s, t vahel on täpselt üks servadest (s, t) ja (t, s). Tõestada, et igas turniiris on selline tipp, millesse saab igast teisest tipust leida ülimalt 2-servalise suunatud lihtahela.

4. (MN 4.6.1) Tõestada, et 2-sidusa graafi suvaline servapaar sisaldub mingis tsüklis.

5. (MN 4.6.2) *Kriitiliseks* nimetatakse sellist 2-sidusat graafi G, mille korral ükski graaf $G-e$, $e \in E(G)$, ei ole enam 2-sidus. Tõestada, et iga kriitiline 2-sidus graaf omab tippu valentsusega 2 ja tuua iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks näide sellisest kriitilisest 2-sidusast graafist, milles leidub tipp valentsusega vähemalt n ja mille kaugus igast valentsusega 2 tipust on samuti vähemalt n.

6. (MN 4.6.3) Tõestada või lükata ümber järgmine väide: iga kriitiline 2-sidus graaf on konstrueeritav tsüklile järjest "sangade" (lihtahelate) lisamise teel.

7. (MN 4.7.2) Olgu k ja n naturaalarvud. Leida kõik võimalikud naturaalarvude jadad $a_1, \ldots, a_k$, mis rahuldavad seost $a_1+\ldots+a_k = n$ ja mille korral avaldise $a_1 \cdot \ldots \cdot a_k$väärtus on maksimaalne.

8. (MN 4.7.3) *Täielik k-aluseline graaf* $K(V_1, \ldots, V_k)$ tippude hulgal V põhineb hulga V klassijaotusel $V_1, \ldots, V_k$, kus kahe tipu vahel on serv parajasti siis, kui need tipud kuuluvad erinevatesse ekvivalentsiklassidesse. Tõestada, et täieliku k-aluselise graafi maksimaalne servade arv vastab "peaaegu võrdsele" klassijaotusele, st. klassijaotusele $V_1, \ldots, V_k$, kus $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ mistahes $1 \leq i, j \leq k$ korral. Leida sellise graafi servade arv.

9*. (MN 4.6.7) Olgu G selline n tipuga graaf, mille servade jaoks kehtib seos

$$|E(G)| \geq (2k-3) \cdot (n-k+1) + 1,$$

kus k on tingimust $2k-1 \leq n$ rahuldav naturaalarv. Tõestada, et graafil G on k-tipusidus alamgraaf.