

Kombinatorika.

Praktikum 7: Topeltloendamine.

1. (\sim MN 7.1.1) Olgu G kolmnurksete tahkudega tasandiline graaf, mille iga tipp on tähistatud arvuga hulgast $\{1, 2, 3\}$, ja mille välistahk on samuti kolmnurkne. Millistel tingimustel on kõiki kolme tähist kandvate tippudega kolmnurkade arv paarisarv?
2. (\sim MN 7.1.2) Buda munk tõuseb hommikul koos päikesega ja ronib lähedaloleva mäe tipus olevasse templisse. Mägi on kõrge ja mungal kulub koos puhkepauside ja mediteerimisega nii palju aega, et templisse jõudes päike juba loojub. Ta veedab öö palvetades ja hakkab jälle päikesetõusu ajal mäest alla laskuma. Tõestada, et templisse viival teel on punkt, mida munk läbib mõlemal päeval täpselt samal kellaajal.
3. (MN 7.1.6) Tõestada, et lauses 7.1.4 vaadeldavas mängus on ühel mängijal alati olemas võitev strateegia ja leida mõlema juhu jaoks näide.
4. (MN 7.2.2) Leida järjestatud hulga $(\{1, 2, \dots, 10!\}, |)$ maksimaalsete ahelate arv ja järjestatud hulga $(\{1, 2, \dots, 5!\}, |)$ maksimaalsete antiahelate arv.
5. (MN 7.2.7) Leida ruuduvaba naturaalarvu n (st. $a^2 \nmid n$, kui $a > 1$) maksimaalne jagajate arv, mis üksteist ei jaga.
6. (MN 7.2.6) Olgu a_1, a_2, \dots, a_n reaalarvud, kusjuures $|a_i| \geq 1$. Tähistagu

$$p(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left| \left\{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \mid \varepsilon_i = \pm 1, -1 < \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i < 1 \right\} \right|.$$

Tõestada, et alati

$$p(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

7. (MN 7.3.1) Tõestada, et iga täisarvu $t \geq 2$ korral on n tipuga $K_{2,t}$ -vaba graafi maksimaalne servade arv

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{t-1} \cdot n^{3/2} + n \right).$$

8. (MN 7.3.3) Tõestada, et $K_{2,2}$ -vabal kahealuselise graafi $K_{m,n}$ alamgraafil G on maksimaalselt $O(m\sqrt{n} + n)$ serva.

9*. Leida kõik ekstremaalsed graafid, mis ei sisalda kooskõla võimsusega k . (Kooskõla on selline graafi servade alamhulk K , et mistahes tipu t korral $\deg_M(t) \leq 1$.)