

Kombinatorika.

Praktikum 9: Ladina ruudud ja lõplikud projektiivsed ruumid.

1. Tõestada, et ükski 24 erinevast võimalusest paremal esitatud tabelit ladina ruuduks muuta ei anna tulemuseks mingi rühma korrutustabelit.

1	2	3	4	5
2	1	5	3	4

2. (MN 9.3.6) *Ladina riskülikuks* nimetatakse $m \times n$ tabelit, mille ükski rida ega veerg ei sisalda korduvaid elemente. Leida kõigi fikseeritud tähestikuga $2 \times n$ ladina riskülikute koguarv.

3. Olgu $m < n$ kaks naturaalarvu. Tõestada, et piisav ja tarvilik tingimus m . järku ladina alamruuduga n . järku ladina ruudu olemasoluks on $m \leq \frac{n}{2}$. (Ladina alamruudud saadakse mingite mitte tingimata kõrvuti asetsevate ridade ja veergude fikseerimisel nii, et tulemuseks on ladina ruut).

4. (MN 9.3.4) *Vabanenud ruuduks* nimetatakse suvalist $n \times n$ tabelit. Vabanenud ruute $R = (r_{ij})$ ja $S = (s_{ij})$ nimetatakse *ristuvateks*, kui kujutus $\iota : n \times n \rightarrow R \times S, (i, j) \mapsto (r_{ij}, s_{ij})$, on injektiivne. Tõestada, et x paarikaupa ristuva n . järku ladina ruudu olemasolu on samaväärne $x + 2$ paarikaupa ristuva vabanenud ruudu olemasoluga.

5. (MN 9.3.5) Olgu $K = \{t_0 = \mathbf{0}, t_1 = \mathbf{1}, t_2, \dots, t_{n-1}\}$ n -elemendiline korpus. Defineerime matriksid $S^{(k)} = (s_{i,j}^k), k, i, j = 1, \dots, n - 1$, seostega

$$s_{i,j}^k = t_i \cdot t_k + t_j.$$

Tõestada, et $S^{(1)}, \dots, S^{(n-1)}$ on n . järku paarikaupa ristuvad ladina ruudud.

6. (MN 9.4.1) Tõestada, et Fano tasand ei ole 2-värvitav.

7. (MN 9.4.3) Tõestada, et kahealuseline $K_{2,2}$ -vaba kahe n -tipulise alusega graaf sisaldab ülimalt $\frac{n}{2} \cdot (1 + \sqrt{4n - 3})$ serva.

8. (MN 9.4.3) Tõestada, et kahealuseline $K_{2,2}$ -vaba kahe n -tipulise aluse ja $\frac{n}{2} \cdot (1 + \sqrt{4n - 3})$ servaga graaf leidub parajasti siis, kui eksisteerib q . järku projektiivne tasand, mille korral $n = q^2 + q + 1$.

9*. Tõestada, et n . järku ladina ruute on vähemalt $n + 1$ korda vähem kui fikseeritud kõrvaldiagonaali elemendiga $(n + 1)$. järku ladina ruute. (Tähestikud on fikseeritud ja suurema ruudu oma sisaldab väiksema ruudu oma.)