Matemaatiline analüüs I
Kordamisküsimised

1. Reaalarvud

Reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ kirjeldamisel peab oskama välja tuua järgmist: 1) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$, 2) aritmeetika (tehted reaalarvudega) ja järjestus, 3) kehtib pidevuse aksioom, 4) geomeetriline mudel – arvsirge (üksühene vastavus reaalarvude ja arvsirge punktide vahel), 5) igast mittenegatiivsest arvust saab võtta n-da juure, 6) alamhulk $\mathbb{N}$ ei ole ülalt tõkestatud (Archimedese printsiip), 7) iga kahe reaalarvu vahel leidub nii ratsionaal- kui ka irratsionaalarve (ratsionaal- ja irratsionaalarvude hulga tihedus).

2. Tõkestatud alamhulgad. Hulga ülemine ja alumine raja

Tõkestatud alamhulgad hulgas $\mathbb{R}$. Tuua näiteid tõkestatud ja tõkestamata hulkadest. Defineerida ülalt tõkestatud hulga ülemine raja ja alt tõkestatud hulga alumine raja, selgitada neid mõisteid (laused 1.2 ja 1.3). Tõestada, et kui alamhulgas on suurim (vähim) element, siis see on hulga ülemine (alumine) raja (lause 1.4). Tuua näiteid alumise ja ülemise raja kohta.

3. Pidevuse aksioom

Esitada pidevuse aksioom (**P**). Tõestada, et igal alt tõkestatud hulgal on alumine raja (lause 1.5). Teada, et kui X ja Y on ülalt tõkestatud alamhulgad, siis $X + Y$ on ülalt tõkestatud ja $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$ (lause 1.6(a)).

4. Reaalarvu absoluutväärtus

Esitada absoluutväärtuse definitsioon. Selgitada, et $|a| = \max\{a, -a\}$, selle seose abil põhjendada lihtsamaid seoseid (vt. lk. 12, väited 1) – 4)). Tõestada, et $|a| \leq c$ parajasti siis, kui $-c \leq a \leq c$ (lause 1.11). Teada (tõestuseta) absoluutväärtuse tehetega seotud omadusi (vt. lause 1.12).

5. Intervallid

Esitada intervalli definitsioon, tuua (põhjendustega) 2 näidet lõpmatust reaalarvude hulgast, mis ei ole intervall. Intervallide tüübid (vahemik, poollõik, lõik; tõkestatud ja tõkestamata intervallid). Esitada reaalarvu ümbruse definitsioon, veenduda, et igal reaalarvul a on lõpmata palju ümbrusi ja nende ühisosaks on $\{a\}$. Defineerida alamhulga $X \subset \mathbb{R}$ sisepunkti mõiste, kirjeldada vahemiku, poollõigu ja lõigu sisepunktide hulka. Tuua 2 näidet reaalarvude hulkadest, millel ei ole sisepunkte.

6. Funktsiooni mõiste

Defineerida funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ mõiste, tuua näiteid tema analüütilise esituse kohta. Esitada paaris- ja paaritu funktsiooni definitsioon, tuua näiteid. Esitada tõkestatud funktsiooni definitsioon, tuua näiteid tõkestatud ja tõkestamata funktsioonide kohta. Tehted funktsioonidega, tuua sellekohaseid näiteid. Esitada liitfunktsiooni mõiste definitsioon, tuua näited.

7. Jada piirväärtus, selle ühesus

Defineerida arvjada mõiste. Defineerida jada piirväärtus ning koonduvad ja hajuvad jadad, tuua näiteid koonduvatest ja hajuvatest jadadest. Tõestada lause koonduva jada piirväärtuse ühesusest (lause 2.3).

8. Koonduva jada tõkestatusest
Defineerida jada tõkestatuse ja koonduvuse mõiste. Tuua näiteid tõkestatud ja tõkestamata jadadest. Tõestada, et iga koonduv jada on tõkestatud (lause 2.1). Tõestada, et kui $x_n \to 0$ ja (y_n) on tõkestatud, siis $x_n y_n \to 0$ (lause 2.2).

9. Koonduvate jadade esimene järjestusega seotud omadus (piirväärtuste võrdlemine)
Tõestada lause 2.4 koonduvate jadade piirväärtuse võrdlemisest.

10. Koonduvate jadade teine järjestusega seotud omadus (nn. "võileivaomadus")
Tõestada lause 2.5.

11. Koonduvate jadade tehetega seotud omadused
Teada koonduvate jadade tehetega seotud omadusi (lause 2.6). Tõestada (vabal valikul) kaks omadust.

12. Tähtsad piirväärtused
Teada piirväärtusi (1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$, (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, tõestada üks juhtudest (1) – (3) .

13. Funktsiooni piirväärtused
Defineerida hulga $D \subset \mathbb{R}$ kuhjumispunkti mõiste, tuua näiteid. Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ korral defineerida $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Ühepoolsed piirvärtused: defineerida $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$. Teada, et intervalli D sisepunktis a kehtib seos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ parajasti siis, kui $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$ (lause 3.1). Defineerida piirväärtused $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, tuua näiteid. Defineerida $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, tuua näiteid.

14. Funktsiooni piirväärtuse Heine kriteerium. Funktsiooni piirväärtuse ühesus
Sõnastada piirväärtuse Heine kriteerium (teoreem 3.2) ja tõestada selle tarvilikkuse-osa. Tõestada Heine kriteeriumi abil, et funktsiooni piirväärtus on üheselt määratud (lause 3.3).

15. Funktsiooni piirväärtuse omadused
Teada funktsiooni piirväärtuse omadusi (väited 3.4 – 3.8). Tõestada (vabal valikul) kas lause 3.4, lause 3.6 või kaks väidet lausest 3.7.

16. Funktsiooni pidevus antud punktis, selle seos vasak- ja parempoolse pidevusega
Defineerida funktsiooni pidevus, vasak- ja parempoolne pidevus antud punktis, selgitada nende mõistete vahekorda (lause 4.1). Tuua näiteid.

17. Tehted pidevate funktsioonidega. Liitfunktsiooni pidevus
Defineerida funktsiooni pidevus antud punktis. Tõestada vabal valikul 2 väidet lausest 4.2. Defineerida liitfunktsiooni mõiste (vt. lk. 23) ja tõestada väide liitfunktsiooni pidevusest (lause 4.3).

18. Lõigus pidev funktsioon, selle omadused
Defineerida funktsiooni pidevus tema määramispiirkonna alamhulgas. Teada lõigus pideva funktsiooni omadusi (teoreemid 4.4 – 4.6).

19. Pööratavad funktsioonid, pöördfunktsiooni pidevus
Defineerida pööratav funktsioon ja selle pöördfunktsioon. Tõestada lause 4.7 rangelt monotoonse funktsiooni pööratavusest ja tema pöördfunktsiooni rangest monotoonsusest. Teada teoreemi 4.8 pöördfunktsiooni pidevusest.

20. Elementaarfunktsioonid. Piirväärtused $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ ja $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$
Selgitada, mis on elementaarfunktsioonid, teada teoreemi 4.9 elementaarfunktsioonide pidevusest. Tõestada, et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ja $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

21. Tuletis ja diferentseeruvus. Diferentseeruva funktsiooni pidevus
Defineerida funktsiooni tuletis ja diferentseeruvus antud punktis. Tõestada, et diferentseeruv funktsioon on pidev (lause 5.1). Näidata, et absoluutväärtusega määratud funktsioon ei ole kohal 0 diferentseeruv (näide 5.3).

22. Diferentseeruvuse geomeetriline tähendus
Lähtudes tuletise definitsioonist, defineerida diferentseeruva funktsiooni graafiku puutuja antud punktis kui seda punkti läbivate lõikajate piirseis.

23. Tehetega seotud diferentseerimisreeglid
Teada funktsioonide summa, vahe, korrutise ja jagatise tuletiste valemeid. Tõestada summa ja korrutise valemid (laused 5.2 ja 5.4). Tuua näiteid nende valemite rakendamise kohta.

24. Liitfunktsiooni ja pöördfunktsiooni tuletis
Tõestada lause 5.6 liitfunktsiooni diferentseerimisest. Teada pöördfunktsiooni diferentseerimise reeglit (lauset 5.7).

25. Fermat' teoreem funktsiooni tuletise seosest lokaalse ekstreemumiga
Defineerida intervallis määratud funktsiooni lokaalse maksimumi ja lokaalse miinimumi mõiste. Tõestada Fermat' teoreem (lause 6.1), selgitada selle lause geomeetrilist sisu. Defineerida funktsiooni statsionaarse punkti mõiste. Tuua näide funktsioonist, mille statsionaarses punktis ei ole lokaalset ekstreemumit.

26. Rolle'i teoreem
Tõestada Rolle'i teoreem (lause 6.2), selgitada selle geomeetrilist sisu.

27. Cauchy keskväärtusteoreem. L'Hospitali reegel
Tõestada Cauchy keskväärtusteoreem (lause 6.4) ja selle järeldusena Lagrange'i keskväärtusteoreem (lause 6.3). Sõnastada l'Hospitali reegel (teoreem 6.5).

28. Taylori valem
Esitada funktsiooni Taylori valem ja kirjeldada tema jääkliikme omadusi (teoreem 6.7 (a) ja (b)). Selgitada Taylori valemi tähtsust. Tuua näide selle valemi rakendamise kohta.

29. Funktsioonide monotoonsus

Defineerida antud hulgas kasvavad, kahanevad, rangelt kasvavad ja rangelt kahanevad funktsioonid. Tõestada lause 7.1 diferentseeruva funktsiooni monotoonsusepiirkondade leidmisest. Tuua näiteid selle lause rakenduste kohta.

30. Funktsiooni lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid

Selgitada lokaalse ja globaalse ekstreemumi mõisteid. Defineerida diferentseeruva funktsiooni kriitilise punkti mõiste. Tõestada lause 7.2 diferentseeruva funktsiooni lokaalsete ekstreemumite leidmisest. Teada lauset 7.3 kaks korda diferentseeruva funktsiooni ekstreemumist. Tuua näiteid nende lausete rakendamise kohta.

31. Funktsiooni algfunktsioon ja integreerimine

Defineerida funktsiooni algfunktsioon, kirjeldada antud funktsiooni kõigi algfunktsioonide hulka. Selgitada funktsiooni määramata integraali mõistet ja integreerimise põhivalemeid.

32. Integreerimisreeglid

Tõestada integreeruvate funktsioonide f ja g summa $f+g$ ja kordse λf integreerimise reeglid (lause 8.1 ja 8.2). Selgitada ositi integreerimise valemit (lause 8.3). Tuua näiteid.

33. Monotoonsed jadad. Monotoonsuseprintsiip

Defineerida kasvavad, kahanevad, rangelt kasvavad ja rangelt kahanevad jadad. Tõestada monotoonsete jadade monotoonsuseprintsiip (lause 9.1).

34. Koonduvad ja hajuvad arvread. Tarvilik tingimus rea koonduvuseks

Defineerida arvrea mõiste ja arvrea koonduvus ning hajuvus. Selgitada, miks rea suvalise arvu esimeste liikmete ärajätmine ei mõjuta rea koonduvust või hajuvust (s.t. tõestada lause 9.2). Tõestada tarvilik tingimus rea koonduvuseks (lause 9.3).

35. Geomeetriline rida, selle koonduvus.

Tõestada, et geomeetriline rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ koondub parajasti siis, kui $|q|<1$, ja leida selle rea summa (lause 9.4).

36. Harmoonilised read

Teada, et harmooniline rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ koondub parajasti siis, kui $\alpha > 0$ (lause 9.7). Tõestada, et rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajub (lause 9.5).

37. Tehted koonduvate ridadega

Tõestada, et kui read $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ koonduvad vastavalt summaks s ja t, siis read $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_k+v_k)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda u_k$ ja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_k-v_k)$ koonduvad vastavalt summaks $s+t$, λs ja $s-t$ (lause 9.8).

38. Ridade esimene ja teine võrdluslause
Selgitada, et mittenegatiivsete liikmetega rea osasummade jada on kasvav. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus sellise rea koonduvuseks (lause 9.9). Tõestada mittenegatiivsete liikmetega ridade esimene võrdluslause (lause 9.10) ja sõnastada teine võrdluslause (lause 9.12). Tuua näiteid nende rakendamise kohta.

39. Rea absoluutne koonduvus
Defineerida rea absoluutse koonduvuse mõiste. Tõestada, et absoluutselt koonduv rida on koonduv (lause 9.13). Tuua näide reast, mis koondub, kuid ei koondu absoluutselt.

40. Cauchy, D'Alemberti ja Leibnizi koonduvustunnused
Tõestada Cauchy koonduvustunnus (lause 10.1) ja sõnastada d'Alemberti koonduvustunnus (lause 10.2) ning Leibnizi koonduvustunnus (lause 10.3). Tuua näiteid nende tunnuste rakendamise kohta.

41. Astmerida, selle koonduvuspiirkond
Selgitada, mis on astmerida, defineerida astmerea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koonduvuspiirkond X ja absoluutse koonduvuse piirkond A. Veenduda, et A on nullpunkti suhtes sümmeetriline intervall. Tõestada neid hulki kirjeldav Cauchy-Hadamardi teoreem (teoreem 10.4). Tuua näiteid.

42. Astmerea summa diferentseeruvus. Funktsiooni Taylori rida
Teada teoreemi astmerea summa diferentseeruvusest (teoreem 10.5). Defineerida lõpmata palju kordi diferentseeruva funktsiooni f Taylori rida, selgitada, kuidas saadakse seos $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ (valem (10.7)) funktsiooni ja astmerea kordajate vahel. Selgitada seost Taylori valemiga (lause 10.7).

43. Eksponentfunktsiooni arendamine astmereaks
Esitada näide 10.12 koos kõigi sammude põhjendustega (seose $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{a^m}{m!} = 0$ $(a \geq 0)$ võib lugeda teadaolevaks!).

44. Logaritmfunktsiooni arendamine astmereaks
Esitada näide 10.13 koos kõigi sammude põhjendustega.

45. Siinusfunktsiooni arendamine astmereaks
Esitada näide 10.14 koos kõigi sammude põhjendustega.

46. Kõvertrapetsi pindala
Selgitada lõigus $[a, b]$ pideva mittenegatiivste väärtustega funktsiooni poolt määratud kõvertrapetsi mõistet. Selgitada lõigu $[a, b]$ alajaotuse ja selle diameetri mõistet. Selgitada ideed, kuidas ristküliksummade abil defineerida kõvertrapetsi pindala.

47. Tõkestatud funktsiooni Darboux' summad ja Darboux' integraal. Integreeruvad funktsioonid
Defineerida lõigus $[a, b]$ tõkestatud funktsiooni Darboux' ülem- ja alamsumma lõigu antud alajaotuse T korral. Selgitada nende geomeetrilist tähendust. Tõestada Darboux' summade kaks omadust (laused 11.1 ja 11.2). Defineerida Darboux ülem- ja alamintegraal ja (Darboux' mõttes) integreeruvad funktsioonid.

48. Tarvilik ja piisav tingimus tõkestatud funktsiooni integreeruvuseks
Defineerida Darboux ülem- ja alamintegraal ja integreeruvad funktsioonid. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus tõkestatud funktsiooni integreeruvuseks (teoreem 11.3). Leida konstantse funktsiooni integraal (näide 11.1), näidata, et Dirichlet' funktsioon ei ole lõigus $[0, 1]$ integreeruv (näide 11.2).

49. Tõkestatud funktsiooni Riemanni integraal
Selgitada, kuidas moodustatakse funktsiooni Riemanni integraalsumma. Defineerida funktsiooni integreeruvus Riemanni mõttes ning funktsiooni Riemanni integraal. Teada järgmisi väiteid. (1) Tõkestatud funktsioon on Riemanni mõttes integreeruv parajasti siis, kui ta on Darboux' mõttes integreeruv, sel juhul vastavad integraalid on võrdsed (teoreem 11.4). (2) Lõigus pidev funktsioon on selles lõigus integreeruv (teoreem 11.5).

50. Integreeruvate funktsioonide omadused
Teada integraali järgmisi omadusi: 1) integreeruvus osalõigus (lause 12.1), 2) aditiivsuseomadus (lause 12.2), 3) tehetega seotud omadused (laused 12.3 ja 12.4), 4) monotoonsuseomadused (lause 12.6), 5) keskväärtusteoreem (lause 12.7).

51. Diferentsiaal- ja integraalarvutuse põhiteoreem
Tõestada keskväärtusteoreemi abil põhiteoreem 12.8 ja selle järeldusena Newton-Leibnizi valem (järeldus 12.10). Tuua näiteid Newton-Leibnizi valemi rakendamise kohta.

Märkus. Eksami piletiküsimused valitakse nende teemade hulgast, mis eespool on paksult trükitud. Lisaküsimusi esitatakse eksamil nii paksult kui ka kaldkirjas trükitud teemade kohta.