MATEMAATILINE ANALÜÜS I

MTMM.00.179 Loengukursus
Tartu Ülikooli
matemaatika-informaatikateaduskonna
üliõpilastele
2014./2015. õppeaasta

Toivo Leiger

Eessõna

Matemaatiline analüüs on matemaatika valdkond, mille tähtsaimaks uurimisobjektiks on funktsioon ning põhiliseks uurimismeetodiks piirväärtuse meetod. Neli kõige olulisemat märksõna, mis seda valdkonda iseloomustavad, on *koonduvus*, *pidevus, tuletis* ja *integraal.*

Matemaatiline analüüs I on esimene sissejuhatav loengukursus nimetatud valdkonda. Selle eesmärgiks on

• esitada esmane ülevaade ühe muutuja funktsioonide analüüsi mõistetest, tulemustest ja meetoditest,

• anda esmased oskused tulemuste rakendamiseks konkreetsete ülesannete lahendamisel ja

• juhatada üliõpilased matemaatika põhilise arutlusmeetodi – väidete tõestamise juurde.

Viimasega seoses olgu märgitud, et valik väidetest, mis selles kursuses tõestatakse, hõlmab vaid väikese osa kõigist esitatud väidetest, seejuures on välja valitud tehniliselt lihtsamad tõestused. Mõned tõestused on esitatud väikeses kirjas, need ei ole kohustuslikud ja on mõeldud lugejale, kes asjast rohkem huvitatud.

Käesolev loengukonspekt koosneb 13 peatükist, iga peatükk hõlmab ühe loengu materjali. Peatüki lõpus antakse lühike sisukokkuvõte, et lugejal oleks lihtsam kogu materjalist üldist pilti saada. Päris palju on tekstis nn. aktiviseerimiselemente, nendeks on lüngad tõestustes ja aruteludes, mis lugejal endal täita tuleb, need on märgitud sümboliga ✠.

Mõistetest, probleemidest ja toodud näidetest paremaks arusaamiseks on püütud neid jooniste abil geomeetriliselt illustreerida. Joonised on koostanud Ksenia Niglas.

Sisukord

1 Reaalarvud

Käesolev matemaatilise analüüsi kursus tegeleb funktsioonidega, mille puhul nii argumendi kui ka funktsiooni väärtused on reaalarvud. Seetõttu alustame reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ ning tema omaduste kirjeldamisega.

1.1 Ratsionaalarvud

Tähistame tähega $\mathbb{N}$ kõigi *naturaalarvude* hulga, niisiis

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Olgu $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ ja

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

hulga $\mathbb{Z}$ elemente nimetatakse *täisarvudeks.* Täisarvude abil moodustatud harilikud murrud kirjeldavad *ratsionaalarve*, tähistame

$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Seejuures loeme hulga $\mathbb{Q}$ elementidena võrdseteks murrud $\frac{m}{n}$ ja $\frac{p}{q}$, kui neil on sama väärtus, näiteks $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.

Erinevalt naturaal- ja täisarvudest on ratsionaalarvude hulk kinnine aritmeetiliste tehete suhtes: arvude $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ja $s = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ puhul on

$$r + s = \frac{mq + np}{nq},\ r - s = \frac{mq - np}{nq},\ rs = \frac{mp}{nq} \text{ ja } \frac{r}{s} = \frac{mq}{np} \tag{1.1}$$

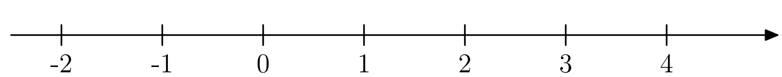
samuti ratsionaalarvud (jagatise $\frac{r}{s}$ puhul eeldame, et $s \neq 0$). Lisaks vaadeldud tehetele on iga kahe ratsionaalarvu $r = \frac{m}{n}$ ja $s = \frac{p}{q}$ puhul nende vahel määratud järjestus seosega

$$r \leq s \;\Leftrightarrow\; mq - np \leq 0. \tag{1.2}$$

Märgime veel, et iga ratsionaalarvu on võimalik esitada kas lõpliku või perioodilise *kümnendmurruna*, näiteks

$$\frac{4}{5} = 0,8 \text{ ja } \frac{2}{3} = 0,666\ldots.$$

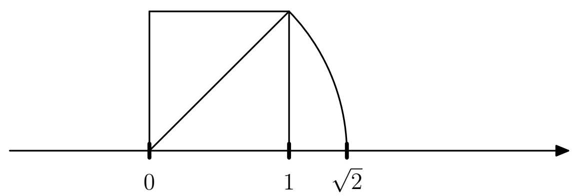
Ratsionaalarvudest piisab igasugusteks mõõtmisteks ja nendega seotud arvutusteks, seejuures omandatakse ratsionaalarvudega arvutamise võtted juba põhikoolis. Nende puuduseks on hulga $\mathbb{Q}$ lünklikkus, mis tuleb ilmsiks, kui vaatleme arvude geomeetrilist mudelit – ***arvsirget***.



Joonis 1.1: Arvsirge.

Olgu mingil sirgel fikseeritud kaks punkti, mis vastavad arvudele 0 ja 1. Suunda punkti 0 poolt punkti 1 poole – tavaliselt paikneb punkt 1 punktist 0 paremal – nimetame positiivseks, vastupidist suunda negatiivseks. Punkte 0 ja 1 ühendava sirglõigu pikkuse loeme ühikuks. Antud ratsionaalarvu $\frac{m}{n}$ puhul jagame selle lõigu n võrdseks osaks ning kanname osalõigu pikkusega $\frac{1}{n}$ punktist 0 alates m korda positiivses suunas, kui $m > 0$, ja $-m$ korda negatiivses suunas, kui $m < 0$. Saadud punkt sirgel vastab ratsionaalarvule $\frac{m}{n}$. Nii saame kanda arvsirgele kõik ratsionaalarvud.

Osutub, et ratsionaalarvud ei täida kogu arvsirget. Teisisõnu, ***leidub sirglõike, mille pikkust ei saa väljendada ratsionaalarvuga.*** Üheks selliseks lõiguks on ühikruudu diagonaal: kui ruudu külje pikkus on 1, siis Pythagorase teoreemi kohaselt on tema diagonaali pikkuseks $\sqrt{2}$ (vt. joonis 1.2), mis järgmise lause põhjal ei ole ratsionaalarv.



Joonis 1.2: Arvsirge punkt $\sqrt{2}$, millele ei vasta ükski ratsionaalarv.

Lause 1.1 *$\sqrt{2}$ ei ole ratsionaalarv.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $q = \frac{m}{n}$ on ratsionaalarv omadusega $q^2 = 2$. Eeldame, et $\frac{m}{n}$ on taandatud murd, s.t. täisarvudel m ja n ei ole ühiseid tegureid. Kuna $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, siis $m^2 = 2n^2$, järelikult on m^2 paarisarv. Paaritu arvu ruut on paaritu arv (kontrollida!)✠, seega peab ka m olema paarisarv, niisiis kehtib seos $m = 2i$ mingi täisarvu i korral. Esialgne võrdus $m^2 = 2n^2$ saab kuju $4i^2 = 2n^2$ ehk $n^2 = 2i^2$, mis ütleb, et ka n on paarisarv (selgitada!)✠.Tähendab, nii m kui n on paarisarvud, nad mõlemad sisaldavad tegurit 2, see on vastuolus meie eeldusega. Väide on tõestatud. ■

1.2 Reaalarvude hulk, selle aritmeetika ja järjestus

Kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$, millele baseerub matemaatiline analüüs, defineeritakse selliselt, et ta sisaldaks kõik ratsionaalarvud, kuid hulgas $\mathbb{Q}$ olevad lüngad oleksid täidetud. Seejuures eeldatakse, et hulgas $\mathbb{R}$ kehtivad teatavad tingimused, oma olemuselt on need kolme tüüpi:
1) aritmeetilised ehk tehetega seotud tingimused,
2) järjestusega seotud tingimused ja
3) täielikkuse tingimus.

Aritmeetika. Eeldame, et hulgas $\mathbb{R}$ on defineeritud reaalarvude liitmine ja korrutamine järgmiste omadustega:
(A1) $a + b = b + a$ kõikide $a, b \in \mathbb{R}$ korral *(liitmise kommutatiivsus)*,
(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ kõikide $a, b, c \in \mathbb{R}$ korral *(liitmise assotsiatiivsus)*,
(A3) $b + 0 = b$ iga $b \in \mathbb{R}$ puhul *(nullelemendi olemasolu)*,
(A4) iga $b \in \mathbb{R}$ puhul leidub $-b \in \mathbb{R}$ omadusega $b + (-b) = 0$ *(vastandelemendi olemasolu)*,
(M1) $ab = ba$ kõikide $a, b \in \mathbb{R}$ korral *(korrutamise kommutatiivsus)*,
(M2) $(ab)\,c = a\,(bc)$ kõikide $a, b, c \in \mathbb{R}$ korral *(korrutamise assotsiatiivsus)*,

(M3) $1b = b$ iga $b \in \mathbb{R}$ puhul *(ühikelemendi olemasolu)*,
(M4) iga $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ puhul leidub $b^{-1} \in \mathbb{R}$ omadusega $bb^{-1} = 1$ *(pöördelemendi olemasolu)*,
(D) $(a+b)\,c = ac + bc$ kõikide $a, b, c \in \mathbb{R}$ korral *(distributiivsus)*.

Neist *aritmeetika aksioomidest*[1] tulenevad ülejäänud arvutuseeskirjad, mis on seotud tehetega. Muuhulgas garanteerivad nad ka selle, et pöördtehted lahutamine

$$a - b := a + (-b)$$

ja jagamine

$$a : b := \frac{a}{b} := ab^{-1}, \text{ eeldusel, et } b \neq 0,$$

on hulgas $\mathbb{R}$ määratud.

Järjestus. Nõuame, et hulk $\mathbb{R}$ oleks järjestatud seosega $<$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:
(O1) suvaliste $a, b \in \mathbb{R}$ puhul kehtib parajasti üks tingimustest $a = b$, $a < b$, $b < a$ *(trihhotoomia reegel)*,
(O2) kui $a < b$ ja $b < c$, siis $a < c$ *(transitiivsus)*,
(O3) kui $a < b$, siis $a + c < b + c$ *(liitmise monotoonsus)*,
(O4) kui $a < b$ ja $c > 0$, siis $ac < bc$ *(korrutamise monotoonsus)*.[2]
Nendest *reaalarvude järjestuse aksioomidest* tulenevad kõik ülejäänud järjestusega seotud arvutuseeskirjad, muuhulgas ka järgmised väited:
1^0 kui $a < b$ ja $c < d$, siis $a + c < b + d$,
2^0 kui $a < b$ ja $c < 0$, siis $bc < ac$,
3^0 võrratused $a < b$ ning $-b < -a$ on samaväärsed,
4^0 kui $0 < a < b$, siis $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Veel paneme tähele, et *iga kahe reaalarvu vahel leidub alati reaalarve*: kui $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$, siis

$$a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b < \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$$

(põhjendada!)✠, niisiis

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

ehk *kahe reaalarvu aritmeetiline keskmine on nende arvude vahel.*

Lepime siinkohal kokku, et edaspidi kasutame me sõna *arv* reaalarvu tähenduses. Niisiis, järgnevas on sõnad *arv* ja *reaalarv* sünonüümid.

Arve $a > 0$ nimetame *positiivseteks* ja arve $a < 0$ *negatiivseteks.* Kirjutame $a \leq b$, kui kehtib üks tingimustest $a < b$ ja $a = b$. Arve $a \geq 0$ nimetame *mittenegatiivseteks* ja arve $a \leq 0$ *mittepositiivseteks.*

Definitsioon. Kui reaalarvude hulgas X leidub niisugune element a, et

$$x \geq a \quad \text{iga } x \in X \quad \text{korral,}$$

[1]Tähed **A** ja **M** on pärit tehete ingliskeelsetest nimetustest *addition* ja *multiplication.*

[2]Täht **O** tuleneb ingliskeelsest sõnast *order* ning $b > a$ on võrratuse $a < b$ teine kirjutusviis.

siis ütleme, et a on hulga X *vähim* ehk *minimaalne* element, seda tähistame $\min X$ või $\min\{x \mid x \in X\}$.

Samamoodi defineeritakse *suurim* ehk *maksimaalne* element, mida tähistame kas $\max X$ või $\max\{x \mid x \in X\}$.

Niisiis,

$$b = \max X \Leftrightarrow [b \in X,\ x \leq b \text{ iga } x \in X \text{ korral}]$$

ja

$$a = \min X \Leftrightarrow [a \in X,\ a \leq x \text{ iga } x \in X \text{ korral}]\,.$$

Kui hulk $X \subset \mathbb{R}$ on lõplik, siis on tal nii suurim kui vähim element (kontrollida!)✠.

Reaalarvude tõkestatud alamhulgad. Definitsioon. Öeldakse, et alamhulk $X \subset \mathbb{R}$ on *ülalt tõkestatud,* kui leidub selline $M \in \mathbb{R}$, et võrratus $x \leq M$ kehtib iga $x \in X$ korral. Arvu M nimetatakse sel juhul hulga X *ülemiseks tõkkeks.*

Analoogiliselt nimetatakse hulka $X \subset \mathbb{R}$ *alt tõkestatuks*, kui leidub $m \in \mathbb{R}$, et iga $x \in X$ korral kehtib võrratus $x \geq m$. Arvu m nimetatakse siis hulga X *alumiseks tõkkeks.*

Öeldakse, et hulk X on *tõkestatud*, kui ta on nii ülalt kui ka alt tõkestatud.

Kahte eelnevat definitsiooni võrreldes näeme, et *kui hulgas $X \subset \mathbb{R}$ on suurim (vähim) element, siis see on hulga X ülemine (alumine) tõke.* Kuid, nagu selgub järgmisest näitest, ei pruugi ülalt tõkestatud hulgal suurimat ega alt tõkestatud hulgal vähimat elementi olla.

Näide 1.1. Alamhulk $X := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ on nii alt kui ka ülalt tõkestatud: arvud 0 ja 1 on vastavalt alumine ja ülemine tõke (selgitada!)✠. Samas ei ole *ükski* arv $b \in X$ selle hulga suurim element: kuna $b < \frac{b+1}{2} < 1$, siis arvude b ja 1 aritmeetiline keskmine $\frac{b+1}{2}$ kuulub hulka X ja on suurem kui b. Analoogiliselt saame, et $0 < \frac{a}{2} < a$ iga $a \in X$ puhul (selgitada!)✠, järelikult ei ole ükski arv a hulga X vähim element.

Selge, et igal ülalt (alt) tõkestatud hulgal leidub lõpmata palju ülemisi (alumisi) tõkkeid: kui M on hulga $X \subset \mathbb{R}$ ülemine tõke ja $d > M$, siis tänu järjestuse omadusele **(O2)** on ka d hulga X ülemiseks tõkkeks (selgitada!)✠. Samamoodi näeme, et kui m on hulga X alumine tõke, siis on seda ka iga reaalarv $c < m$. Niisiis ei ole ülemiste tõkete hulgas maksimaalset ega alumiste tõkete hulgas minimaalset. Küsimus on vähima ülemise ning suurima alumise tõkke olemasolus.

1.3 Reaalarvude hulga täielikkus

Algebras nimetatakse hulki, milles on defineeritud liitmine ja korrutamine omadustega **(A1)** – **(A4)**, **(M1)** – **(M4)** ja **(D)**, korpusteks. Kui korpuses on defineeritud järjestus omadustega **(O1)** – **(O4)**, siis kõneldakse järjestatud korpusest. Meie eelneva arutelu kohaselt on reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ järjestatud korpus, lihtne on veenduda, et seda on ka ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$. Seetõttu on vahetult aritmeetikast ja järjestusest tulenevad arvutuseeskirjad ratsionaal- ja reaalarvudel samad. Käesolevas alapunktis käsitleme reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ täielikkuse omadust, mis (see selgub analüüsi järgnevates kursustes) määrab järjestatud korpuse $\mathbb{R}$ üheselt.

Hulga ülemine ja alumine raja. Definitsioon. Kui ülalt tõkestatud mittetühjal hulgal $X \subset \mathbb{R}$ on olemas ***vähim*** ülemine tõke, siis seda nimetatakse hulga X *ülemiseks rajaks* ehk *supreemumiks* ja tähistatakse $\sup X$ või $\sup\{x \mid x \in X\}$.

Alt tõkestatud mittetühja hulga $X \subset \mathbb{R}$ ***suurimat*** alumist tõket (kui see eksisteerib) nimetatakse selle hulga *alumiseks rajaks* ehk *infiimumiks* ja tähistatakse kas $\inf X$ või $\inf\{x \mid x \in X\}$.

Lause 1.2 *Olgu $X \subset \mathbb{R}$ mittetühi hulk. Arv $b \in \mathbb{R}$ on hulga X ülemine raja (s.t. $b = \sup X$) parajasti siis, kui*
(i) *$x \leq b$ iga $x \in X$ korral ja*
(ii) *iga $c \in \mathbb{R}$ korral, mis rahuldab võrratust $c < b$, leidub selline $x_0 \in X$, et $c < x_0$.*
Seejuures võib tingimuse (ii) *esitada temaga samaväärsel kujul*
(ii′) *iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $x_0 \in X$, et $b - \varepsilon < x_0$.*

Tõestus. Tõepoolest, tingimus (i) tähendab, et b on hulga X ülemine tõke, tingimus (ii) aga seda, et ükski arvust b väiksem arv ei saa olla hulga X ülemiseks tõkkeks. ■

Lause 1.3 *Olgu $X \subset \mathbb{R}$ mittetühi hulk. Võrdus $\inf X = a$ kehtib parajasti siis, kui*
(i) *$x \geq a$ iga $x \in X$ korral ja*
(ii) *iga $d \in \mathbb{R}$ korral, mis rahuldab võrratust $d > a$, leidub selline $x_0 \in X$, et $x_0 < d$.*
Tingimuse (ii) *võib esitada temaga samaväärsel kujul*
(ii′) *iga positiivse $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $x_0 \in X$, et $x_0 < a + \varepsilon$.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Vaatleme hulka $X \subset \mathbb{R}$, milles on suurim element, olgu $b := \max X$. Kuna $x \leq b$ iga $x \in X$ korral, siis on b hulga X ülemine tõke. Teisalt, kuna $b \in X$, siis hulga X iga ülemine tõke c peab rahuldama võrratust $c \geq b$. Kokkuvõttes on b hulga X vähim ülemine tõke, s.t. $b = \sup X$. Niisiis, me tõestasime järgmise väite.

Lause 1.4 *Kui hulgas X eksisteerib suurim element, siis see on hulga X ülemine raja, s.t.* $\sup X = \max X$. *Analoogiliselt, kui* $\min X$ *eksisteerib, siis* $\inf X = \min X$.

Pidevuse aksioom. Nagu me eelpool veendusime (vrd. näide 1.1), ei pruugi ülalt tõkestatud alamhulgal olla maksimaalset ega alt tõkestatud hulgal minimaalset elementi. Selge ei ole ka ülemise ja alumise raja olemasolu, seda ei ole aritmeetika ja järjestuse aksioomidest lähtudes võimalik tõestada. Seepärast eeldatakse (s.t. postuleeritakse), et reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$ kehtib järgmine väide, mida nimetatakse pidevuse aksioomiks:

(P) *igal ülalt tõkestatud mittetühjal hulgal $X \subset \mathbb{R}$ leidub ülemine raja.*

Reaalarvude hulga seda omadust nimetatakse tema *täielikkuseks.*

Järgneva lause kohaselt järeldub aksioomist **(P)** alumise raja olemasolu igal alt tõkestatud alamhulgal. Selle tõestamisel rakendame me mitmel korral järjestuse aksioomidest järelduvat omadust 3^0.

Lause 1.5 *Igal alt tõkestatud mittetühjal alamhulgal $X \subset \mathbb{R}$ on olemas alumine raja.*

Tõestus. Eeldame, et $X \subset \mathbb{R}$ on mittetühi alamhulk, mis on alt tõkestatud reaalarvuga m, s.t. $m \leq x$ iga $x \in X$ korral. Eelpoolmainitud omaduse 3^0 kohaselt

$$-x \leq -m \text{ iga } x \in X \text{ korral.}$$

(selgitada!)✠. Tähistame

$$Y := \{-x \mid x \in X\}$$

ja paneme tähele, et hulk Y on ülalt tõkestatud (selgitada!)✠. Pidevuse aksioomi **(P)** põhjal leidub tal ülemine raja $c := \sup Y$.

Näitame, et arv $a := -c$ on hulga X alumine raja. Kuna $-x \leq c$, siis $x \geq -c = a$ iga $x \in X$ korral (põhjendada!)✠, mis tähendab, et a on hulga X alumine tõke. Osutub, et ta on alumistest tõketest suurim. Et selles veenduda, võtame suvalise $d > a$ ja kontrollime niisuguse $x_0 \in X$ olemasolu, mis rahuldab tingimust $x_0 < d$. Teisisõnu, me näitame, et lause 1.3 tingimus (ii) on täidetud.

Võrratusest $d > a$ tuleneb, et $-d < -a = c$, ja kuna $c = \sup Y$, siis lause 1.2 tingimuse (ii) põhjal leidub selline $y_0 \in Y$, et $y_0 > -d$. Seejuures $y_0 = -x_0$ mingi $x_0 \in X$ korral, mistõttu $-x_0 = y_0 > -d$ ehk $x_0 < d$. Lause on tõestatud. ■

Näide 1.2. Olgu $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$, veendume, et hulga

$$X := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

korral kehtivad seosed $a = \inf X$ ning $b = \sup X$.

Kuna $b = \max X$ (selgitada!)✠, siis lause 1.4 kohaselt $b = \sup X$. On selge, et arv a on hulga X alumine tõke: kui $x \in X$, siis $x > a$. Jääb kontrollida, kas a on hulga X *suurim* alumine tõke. Selleks peame vastavalt lausele 1.3 näitama, et ükski arv d, mis on suurem kui a, ei ole hulga X alumine tõke. Olgu $d > a$, siis

$$a < \frac{a+d}{2} < d.$$

Kui $\frac{a+d}{2} > b$, siis $b < d$, mistõttu d ei ole hulga X alumine tõke. Kui aga $\frac{a+d}{2} \leq b$, siis $\frac{a+d}{2} \in X$ ja kuna $\frac{a+d}{2} < d$, siis ei ole d ka sel juhul hulga X alumine tõke. Me tõestasime, et $a = \inf X$.

Järgmine lause kirjeldab liitmisega seotud arvutuseeskirju supreemumi ning infiimumi leidmisel. Selle lause tõestus esitatakse kursuses *Matemaatiline analüüs III.*

Lause 1.6 *Olgu X ja Y mittetühjad reaalarvude hulgad.*
(a) *Kui X ja Y on ülalt tõkestatud, siis on ka hulk $\{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ja*

$$\sup \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\} = \sup X + \sup Y.$$

(b) *Kui X ja Y on alt tõkestatud, siis on ka hulk $\{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ alt tõkestatud ja*

$$\inf \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\} = \inf X + \inf Y.$$

Arvsirge, millest oli juttu seoses ratsionaalarvudega, on reaalarvude hea geomeetriline mudel. Positiivsele arvule a seame arvsirge positiivsel poolel vastavusse punkti, mille kaugus nullpunktist on a, negatiivse a puhul fikseerime arvtelje negatiivsel poolel punkti kaugusel $-a$. Pidevuse aksioom (**P**) garanteerib selle, et ***igale arvsirge punktile vastab mingi üheselt määratud reaalarv***.

Et selles veenduda, fikseerime arvsirgel suvalise punkti P, märgime tähtedega X ja Y nende reaalarvude hulga, millele vastavad arvsirge punktid paiknevad punktist P vastavalt vasakul ja paremal. Kõikide $x \in X$ ja $y \in Y$ korral kehtib võrratus $x < y$, meie eesmärgiks on näidata, et leidub selline $c \in \mathbb{R}$, mis rahuldab tingimust

$$x \leq c \leq y \text{ suvaliste } x \in X \text{ ja } y \in Y \text{ korral,} \tag{1.3}$$

sel juhul reaalarv c vastabki arvtelje punktile P.

Paneme tähele, et

1) iga $y \in Y$ on hulga X ülemine tõke ja

2) iga $x \in X$ on hulga Y alumine tõke.

Seega on hulk X ülalt tõkestatud, mistõttu pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib $c := \sup X$, selge, et $x \leq c$ kõikide $x \in X$ puhul. Kuna c on hulga X vähim ülemine tõke, siis $c \leq y$ iga $y \in Y$ korral, kokkuvõttes kehtib tingimus (1.3).

Tähtsad teoreemid. Me esitame siinkohal tõestuseta neli tähtsat teoreemi reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ omaduste kohta, mis tulenevad tema täielikkuseomadusest. Esimene neist väidab, et erinevalt ratsionaalarvudest on igal mittenegatiivsel reaalarvul n-astme juur suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral.

Teoreem 1.7 ***(n-nda juure olemasolu).*** *Iga mittenegatiivse reaalarvu b ja iga naturaalarvu n korral leidub üheselt määratud mittenegatiivne reaalarv x omadusega $x^n = b$.*

Definitsioon. Arvu $x \geq 0$ omadusega $x^n = b$ nimetatakse arvu $b \geq 0$ *n-daks juureks* ja tähistatakse $\sqrt[n]{b}$.

Teoreemist 1.7 järeldub muuhulgas, et $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$, niisiis, alamhulk $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ei ole tühi.

Definitsioon. Reaalarve $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nimetatakse *irratsionaalarvudeks*.

Järgmised kolm teoreemi kirjeldavad vastavalt naturaalarvude hulga $\mathbb{N}$, ratsionaalarvude hulga $\mathbb{Q}$ ja irratsionaalarvude hulga $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ omadusi reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$.

Teoreem 1.8 ***(Archimedese printsiip).*** *Alamhulk $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ei ole ülalt tõkestatud, s.t. iga reaalarvu a korral leidub temast suurem naturaalarv n. Teisisõnu,*

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > a.$$

Teoreem 1.9 ***(ratsionaalarvude hulga tihedus).*** *Kõigi ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$ on tihe hulgas $\mathbb{R}$ järgmises mõttes: kui $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$, siis leidub selline ratsionaalarv r, et $a < r < b$.*

Teoreem 1.10 ***(irratsionaalarvude hulga tihedus).*** *Irratsionaalarvude hulk $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on tihe hulgas $\mathbb{R}$: kui $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$, siis leidub selline irratsionaalarv ρ, et $a < \rho < b$.*

Näide 1.3. Leiame hulga
$$X := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$
alumise ja ülemise raja. Lihtne on veenduda, et arv 1 on hulga X suurim element, lause 1.4 kohaselt $\sup X = 1$. Näitame, et $\inf X = 0$.

Kuna hulga X kõik elemendid on positiivsed arvud, siis on 0 hulga X alumine tõke. Näitame, et 0 on selle hulga suurim alumine tõke, s.t. ükski positiivne arv ei ole alumiseks tõkkeks. Olgu $\varepsilon > 0$, Archimedese printsiibi põhjal saame leida sellise naturaalarvu n_0, mis on suurem kui $\frac{1}{\varepsilon}$. Siis (vrd. järjestuse aksioomidest järelduv omadus 4^0)
$$\frac{1}{n_0} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$
(põhjendada!)✠, mis ütlebki, et *ükski* $\varepsilon > 0$ *ei ole hulga* X *alumine tõke.* Niisiis, $\inf X = 0$.

Reaalarvude kümnendesitused. Nagu eespool märgitud, saab ratsionaalarve mitmel viisil esitada, peale harilike ning kümnendmurdude on selliseid esitusi teisigi. Sama kehtib ka reaalarvude puhul, kuid sel juhul on esitused keerulisemad. Neist üks lihtsamaid on esitus *lõpmatute kümnendmurdudena*. Osutub, et iga positiivne reaalarv $a \in \mathbb{R}$ on ühesel viisil esitatav lõpmatu kümnendmurruna
$$\alpha, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots,$$
mis ei lõpe numbriga 9 perioodis (murrud $\alpha, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n 999 \ldots$ ja $\alpha, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots (\alpha_n + 1) = \alpha, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots (\alpha_n + 1)0 \ldots$ loetakse võrdseteks) ja igale sellisele lõpmatule kümnendmurrule vastab üheselt määratud reaalarv. Kui lugeda lõplikud kümnendmurrud perioodilisteks (s.o. perioodiga 0), siis võib öelda, et *kõigi lõpmatute kümnendmurdude hulgas vastavad ratsionaalarvudele parajasti perioodilised kümnendmurrud.*

1.4 Absoluutväärtus. Intervallid

Absoluutväärtus, selle omadused. Definitsioon. Arvu $a \in \mathbb{R}$ *absoluutväärtuseks* nimetatakse arvu
$$|a| := \begin{cases} a, \text{ kui } a \geq 0, \\ -a, \text{ kui } a < 0. \end{cases}$$
Definitsioonist järeldub vahetult seos
$$|a| = \max\{a, -a\},$$
selle abil on lihtne veenduda, et
1) $a \leq |a|$ ja $-a \leq |a|$,
2) $|a| \geq 0$,
3) $|-a| = |a|$ ja
4) $|a| = 0$ parajasti siis, kui $a = 0$
(kontrollida!)✠. Paljudes järgnevates arutlustes mängib olulist rolli järgmine absoluutväärtuse omadus.

Lause 1.11 *Reaalarvude a ja c korral kehtib võrratus $|a| \leq c$ parajasti siis, kui $-c \leq a \leq c$.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et $|a| \le c$, ja veendume, et siis $-c \le a \le c$. Tõepoolest, kui $|a| \le c$, siis

$$a \le \max\{a, -a\} = |a| \le c$$

ja

$$-a \le \max\{a, -a\} = |a| \le c,$$

mis tingimuse 3^0 kohaselt tähendab, et $-c \le a$. Kokkuvõttes $-c \le a \le c$.

Piisavus. Nüüd eeldame, et $-c \le a \le c$, siis $-a \le c$ (vrd. tingimus 3^0), mistõttu

$$|a| = \max\{a, -a\} \le c.$$

Lause on tõestatud. ■

Lause 1.12 *Reaalarvude a ja b puhul kehtivad järgmised väited:*
(a) $|a+b| \le |a| + |b|$ *(absoluutväärtuse kolmnurgaomadus),*
(b) $|a-b| \le |a| + |b|$,
(c) $||a| - |b|| \le |a-b|$,
(d) $|ab| = |a|\,|b|$.

Tõestus. (a) Kuna $a \le |a|$ ja $b \le |b|$, siis

$$a + b \le |a| + |b|$$

(põhjendada!✠). Samamoodi saame seostest $-a \le |a|$ ja $-b \le |b|$, et

$$-(a+b) = -a - b \le |a| + |b|.$$

Kokkuvõttes

$$|a+b| = \max\{a+b, -(a+b)\} \le |a| + |b|.$$

Väide (b) tõestatakse analoogiliselt (iseseisvalt!)✠.

Väite (c) tõestamisel kasutame tõestatud võrratust (a). Esitades arvu a kujul $a = (a-b) + b$, saame võrratuse $|a| \le |a-b| + |b|$ ehk $|a| - |b| \le |a-b|$. Võrdusest $b = b - a + a$ saame analoogiliselt, et $|b| \le |a-b| + |a|$ (peame silmas, et $|b-a| = |a-b|$) ehk $|a| - |b| \le |a-b|$. Seega

$$||a| - |b|| = \max\{|a| - |b|, -(|a| - |b|)\} \le |a-b|.$$

(d) Kui $a \ge 0$ ja $b \ge 0$, siis $ab \ge 0$ ja $|ab| = ab = |a|\,|b|$. Seda asjaolu kasutame ka ülejäänud juhtude tõestamisel. Kui $a \le 0$ ja $b \le 0$, siis $-a = |a| \ge 0$ ning $-b = |b| \ge 0$, mistõttu

$$|ab| = |(-a)(-b)| = |-a|\,|-b| = |a|\,|b|.$$

Erimärgiliste arvude a ja b puhul on korrutis ab mittepositiivne, seega näiteks juhul $a \le 0$ ja $b \ge 0$ saame analoogiliselt eelnevaga, et

$$|ab| = -(ab) = (-a)\,b = |-a|\,|b| = |a|\,|b|$$

(põhjendada!)✠. ■

Tõkestatud alamhulkade kirjeldamine absoluutväärtuse abil. Eelpool toodud definitsiooni kohaselt on alamhulk $X \subset \mathbb{R}$ tõkestatud parajasti siis, kui

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq x \leq M \text{ iga } x \in X \text{ puhul.} \tag{1.4}$$

Veendume, et (1.4) *on samaväärne tingimusega*

$$\exists K > 0 : |x| \leq K \quad \text{iga } x \in X \text{ korral,} \tag{1.5}$$

selleks kasutame lauset 1.11. Kui (1.5) kehtib, siis $-K \leq x \leq K$ kõikide $x \in X$ puhul, seega kehtib tingimus (1.4), kus $m := -K$ ja $M := K$. Vastupidi, kui tingimus (1.4) on täidetud, valime arvuks K suurima arvudest $|m|$ ja $|M|$, s.t. $K := \max\{|m|, |M|\}$, siis

$$-K \leq -|m| \leq m \leq x \leq M \leq |M| \leq K$$

(selgitada!)✠, seega $-K \leq x \leq K$ ehk $|x| \leq K$ iga $x \in X$ korral. Kokkuvõttes oleme näidanud, et tingimusest (1.4) järeldub tingimus (1.5) ja vastupidi, mis tähendabki, et need tingimused on samaväärsed.

Intervallid. Arvsirge kui reaalarvude hulga geomeetriline mudel on oluliselt kujundanud ka reaalarvudega seotud terminoloogiat. Näiteks nimetame me reaalarve ka *arvsirge punktideks*, teatavaid reaalarvude hulki aga intervallideks.

Definitsioon. *Intervalliks* nimetatakse sellist alamhulka $X \subset \mathbb{R}$, millel on järgmine omadus: kui $a, b \in X$ ja $a < x < b$, siis $x \in X$.

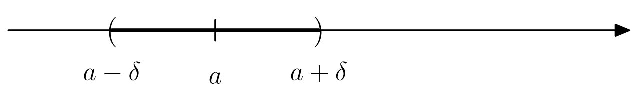
Iga kaks reaalarvu a ja b, kus $a < b$, määravad ära neli intervalli:
vahemiku $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
poollõigud $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ja $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ning
lõigu $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
Lisaks neile neljale intervallide tüübile tuleb meil tegemist ka *tõkestamata intervallidega*

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \quad (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

ja

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \quad [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},$$

neile lisandub $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.



Joonis 1.3: Arvu a δ-ümbrus.

Definitsioon. Olgu a mingi arv. Vahemikku

$$(a - \delta, a + \delta) =: U_\delta(a),$$

kus δ on mingi positiivne arv, nimetatakse *arvu* (ehk *punkti*) *a δ-ümbruseks* (vt. joonis 1.3). Arvu δ nimetatakse seejuures ümbruse $U_\delta(a)$ *raadiuseks*.

Igal punktil $a \in \mathbb{R}$ on lõpmata palju ümbrusi, s.h. kuitahes väikese raadiusega. Sellest tuleneb, et

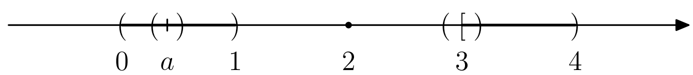
$$\bigcap_{\delta>0} U_\delta (a) = \{a\},$$

teisisõnu, kui mingi arv x kuulub punkti a *igasse* ümbrusse, siis $x = a$ (selgitada!)✠.

Definitsioon. Punkti $a \in X$ nimetatakse hulga $X \subset \mathbb{R}$ *sisepunktiks*, kui leidub selline $\delta > 0$, et $U_\delta (a) \subset X$. Hulga X kõigi sisepunktide hulka tähistame X^o. Alamhulka $X \subset \mathbb{R}$, mis koosneb vaid sisepunktidest, nimetatakse *lahtiseks*.

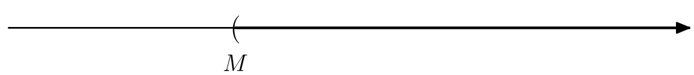
Näiteks kõik vahemikud (a, b) ja tõkestamata intervallid $(-\infty, b)$, (a, ∞) ja $(-\infty, \infty)$ koosnevad ainult sisepunktidest (selgitada!)✠, niisiis, $X = X^o$, kui X on üks neist intervallidest. Seevastu kõigi naturaalarvude hulgal $\mathbb{N}$ ei ole ühtegi sisepunkti (põhjendada!)✠, s.t. $\mathbb{N}^o = \varnothing$.

Joonisel 1.4 esitatud hulga $X = (0, 1) \cup \{2\} \cup [3, 4)$ sisepunktideks on vahemike $(0, 1)$ ja $(3, 4)$ punktid, niisiis $X^o = (0, 1) \cup (3, 4)$, (veenduda, et arvud 2 ja 3 ei ole hulga X sisepunktid!)✠.



Joonis 1.4: Hulga sisepunktid.

Sümbolid ∞ ja $-\infty$ – nende jaoks kasutame vastavalt nimetust *(pluss) lõpmatus* ja *miinus lõpmatus* – , mida me eespool intervallide tähistamisel tarvitasime, ***ei ole reaalarvud ja nendega ei saa sooritada aritmeetilisi tehteid***. Küll aga kasutatakse neid reaalarvude ja nende hulkadega seotud omaduste kirjeldamisel.



Joonis 1.5: Lõpmatuspunkti ∞ ümbrus.

Definitsioon. (i) Intervalli $(M, \infty) =: U_M (\infty)$, kus $M > 0$, nimetatakse lõpmatuspunkti ∞ ümbruseks (vt. joonis 1.5).
(ii) Intervalli $(-\infty, -M) := U_M (-\infty)$, kus $M > 0$, nimetatakse lõpmatuspunkti $-\infty$ ümbruseks.

Kokkuvõte

Ratsionaalarvude oluliseks puuduseks on nende hulga $\mathbb{Q}$ lünklikkus. See tuleb esile, kui uurida ratsionaalarvude paiknemist arvsirgel: sellel on punkte, millele ei vasta ükski ratsionaalarv. Leidub sirglõike, mille pikkust ei saa väljendada ratsionaalarvuga, mitmed "elutähtsad" konstandid ei ole ratsionaalsed, nende hulgas ka π, s.o. ringjoone pikkuse ja diameetri suhe. Hulga $\mathbb{Q}$ lünklikkuse tõttu ei saa teda rakendada nõudlikumate matemaatiliste mudelite konstrueerimisel ja – see on meie jaoks eriti tähtis – analüüsi kui matemaatilise teooria ülesehitamisel.

Reaalarvude defineerimisel seatakse eesmärgiks moodustada selline arvusüsteem, mis kataks arvsirge täielikult ja mille aritmeetika ning järjestus alluksid ratsionaalarvude korral kehtivatele reeglitele. Reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ määratakse aksiomaatiliselt järgmiste tingimustega:
1) ta sisaldab kõik ratsionaalarvud,
2) selles määratud aritmeetilised tehted rahuldavad korpuse aksioome (**A1**) – (**A4**), (**M1**) – (**M4**) ja (**D**),
3) selles määratud järjestus rahuldab järjestatud korpuse aksioome (**O1**) – (**O4**) ja
4) on rahuldatud pidevuse aksioom (**P**).
Just viimane aksioom (**P**), mille kohaselt igal ülalt tõkestatud arvuhulgal leidub ülemine raja ehk supreemum, s.o. vähim ülemine tõke, garanteerib lünkade puudumise hulgas $\mathbb{R}$. Niisiis kehtib hulga $\mathbb{R}$ ja arvsirge punktide vahel üksühene vastavus, seetõttu kõneleme me reaalarvudest ka kui (arvsirge) punktidest.

Iga reaalarvu a korral defineeritakse tema absoluutväärtus $|a|$, milleks on arvteljel punkti a kaugus nullpunktist 0. Selle abil määratakse reaalarvude a ja b omavaheline kaugus $|a - b|$. Kõikvõimalike arvuhulkade hulgas mängivad olulist rolli intervallid, nii nimetatakse hulka $X \subset \mathbb{R}$ omadusega

$$[a, b \in X,\ a < x < b] \Rightarrow x \in X.$$

Iga reaalarvuga a on seotud tema ümbruste süsteem, mis koosneb tõkestatud intervallidest keskpunktiga a.

Reaalarvudel (nagu ratsionaalarvudelgi) on erinevaid esitusi. Neist tuntuim ning lihtsaim on esitus lõpmatute kümnendmurdudena, seega kujul $\alpha, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, kus α on mingi täisarv ja $\alpha_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ iga indeksi k puhul. Seejuures eeldatakse, et kümnendmurd ei lõpe numbriga 9 perioodis. Osutub, et kõigi lõpmatute kümnendmurdude hulgas vastavad ratsionaalarvudele parajasti perioodilised kümnendmurrud.

Reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ üldiste omaduste juurde, millest tähtsaim on fakt, et nii ratsionaalarvud kui ka irratsionaalarvud (s.o. arvud $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$) paiknevad hulgas $\mathbb{R}$ teatavas mõttes tihedalt, tullakse tagasi kursuses *Matemaatiline analüüs III.* Järgnevates analüüsi kursustes tõestatakse ka, et eelpooltoodud aksioome rahuldav arvusüsteem $\mathbb{R}$ tõepoolest eksisteerib ja on seejuures üheselt määratud.

2 Funktsioonid ja jadad

Funktsioon on matemaatilise analüüsi põhiline uurimisobjekt. Tegemist on matemaatilise mõistega, mille abil saab kirjeldada looduses ja ühiskonnas toimuvate protsesside omavahelisi seoseid.

2.1 Funktsioonid

Definitsioon. Olgu D mittetühi reaalarvude hulk, s.t. $D \subset \mathbb{R}$ ja $D \neq \varnothing$. Kui igale arvule x hulgast D on mingi eeskirja järgi seatud vastavusse ***üheselt määratud*** arv y, mida me tähistame $f(x)$, siis öeldakse, et hulgas D on defineeritud *funktsioon* f. Hulka D nimetatakse funktsiooni f *määramispiirkonnaks*, hulka

$$f(D) := \{f(x) \mid x \in D\}$$

aga *väärtuste hulgaks*. Punktide hulka

$$\mathrm{Gr} f := \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

xy-tasandil nimetatakse funktsiooni f *graafikuks*.

Niimoodi defineeritud funktsiooni tähistame $f \colon D \to \mathbb{R}$, mõnikord ka $y = f(x)$.

Funktsioonide analüütiline esitus. Kui funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ on esitatud valemiga

$$y = f(x),$$

siis muutujat x nimetame *sõltumatuks* (teda nimetatakse ka funktsiooni f *argumendiks*), muutujat y aga *sõltuvaks muutujaks*. Mingi reaalset protsessi kirjeldava funktsionaalse sõltuvuse puhul on määramispiirkond D enamasti määratud selle protsessi tingimustega. Kui funktsioon f on antud valemiga $y = f(x)$ ilma määramispiirkonda D fikseerimata, siis võetakse selleks kõigi nende reaalarvude x hulk, mille korral avaldis $f(x)$ omab mõtet.

Näide 2.1. Olgu funktsioon f antud seosega

$$y = \sqrt{\frac{x}{x-5}}.$$

Selle parem pool omab mõtet vaid juhul, kui $\frac{x}{x-5} \geq 0$. Selleks on kaks võimalust:
a) $x \geq 0$ ja $x > 5$ ning
b) $x \leq 0$ ja $x < 5$.
Juhul a) on mõlemad võrratused rahuldatud, kui $x > 5$, juhul b) aga siis, kui $x \leq 0$. Kokkuvõttes on funktsiooni f määramispiirkonnaks hulk $D := (-\infty, 0] \cup (5, \infty)$.

Tihti on funktsioon $f \colon D \to \mathbb{R}$ oma määramispiirkonna D erinevates osades määratud erinevate valemitega. Olgu $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$ ning $D_k \cap D_i = \varnothing$ suvaliste erinevate indeksite $k, i \in \{1, \ldots, n\}$ korral. Kui igas alamhulgas D_k on määratud funktsioon f_k, siis võime defineerida funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ seosega

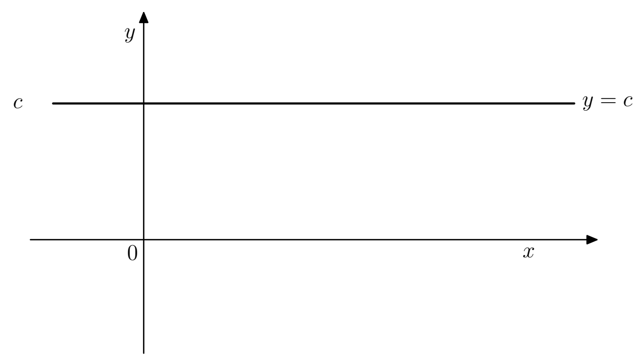
$$f(x) := \begin{cases} f_1(x), & \text{kui } x \in D_1, \\ f_2(x), & \text{kui } x \in D_2, \\ \ldots \\ f_n(x), & \text{kui } x \in D_n. \end{cases}$$

Vaatleme mõningaid lihtsamaid funktsioone.

- *Konstantne funktsioon*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := c,$$

kus $c \in \mathbb{R}$ on fikseeritud. Selle graafikuks xy-tasandil on x-teljega paralleelne sirge, mis läbib y-teljel punkti c (vt. joonis 2.1).

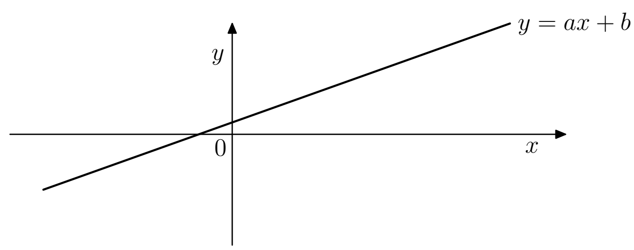


Joonis 2.1: Konstantne funktsioon $y = c$.

- *Lineaarne funktsioon*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := ax + b,$$

kus kordajad $a, b \in \mathbb{R}$ on fikseeritud. Kui $a \neq 0$, siis selle funktsiooni graafikuks on sirge, mis läbib punkte $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ ja $(0, b)$. Juhul $a = 0$ saame konstantse funktsiooni, teine tähtis erijuht, kui $b = 0$ ja $a = 1$, kirjeldab *identsusfunktsiooni* $y = x$.

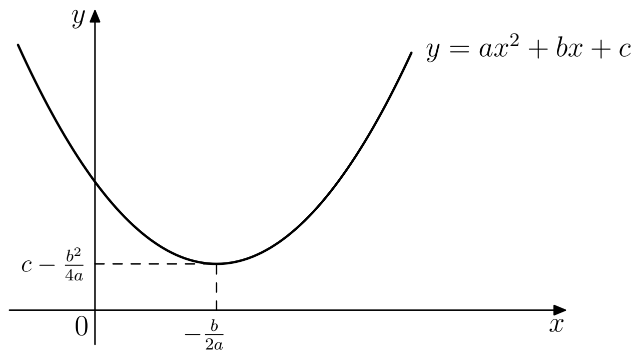


Joonis 2.2: Lineaarne funktsioon $y = ax + b$.

- *Polünoom*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kus kordajad $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ on fikseeritud. Kui $n = 2$, saame ruutpolünoomi $y = ax^2+bx+c$, mille graafikuks (eeldusel $a \neq 0$) on parabool tipuga punktis $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ (vt. joonis 2.3). Selge, et ka lineaarne funktsioon on polünoom, sel juhul $n = 1$.



Joonis 2.3: Ruutpolünoom $y = ax^2 + bx + c$.

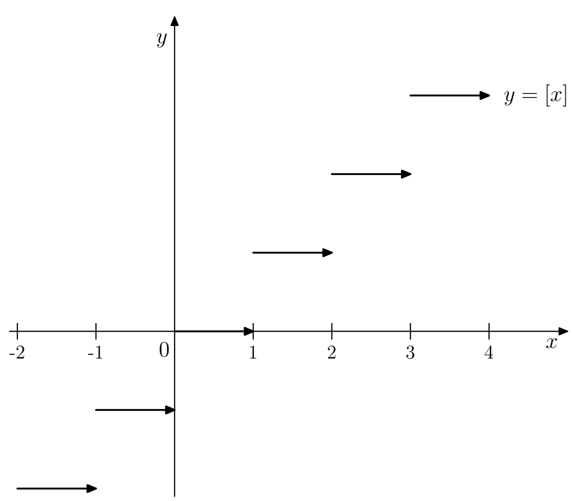
- *Dirichlet' funktsioon*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- *Täisosa-funktsioon*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := [x] := n, \text{ kui } n \leq x < n+1 \text{ ja } n \in \mathbb{Z},$$

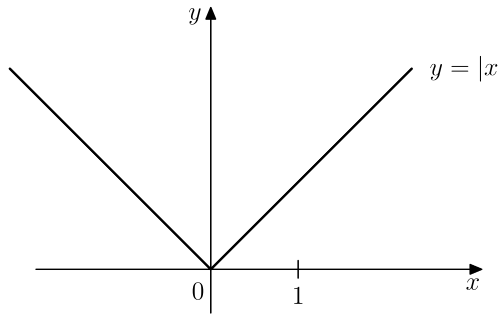
selle graafikut illustreerib joonis 2.4.



Joonis 2.4: Täisosa-funktsioon $y = [x]$.

- *Absoluutväärtust* kirjeldab funktsioon

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := |x| = \begin{cases} x, & \text{kui } x \in [0, \infty), \\ -x, & \text{kui } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$



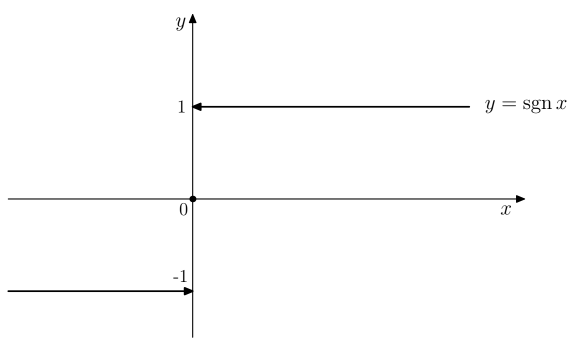
Joonis 2.5: Funktsioon $y = |x|$.

mille graafik on joonisel 2.5.

- *Signumfunktsioon*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\;\; f(x) := \mathrm{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in (-\infty, 0)\,, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \\ -1, & \text{kui } x \in (-\infty, 0)\,, \end{cases}$$

selle graafik on esitatud joonisel 2.6.



Joonis 2.6: Signumfunktsioon $y = \mathrm{sgn} x$.

Paaris- ja paaritud funktsioonid. Olgu funktsiooni f määramispiirkond D sümmeetriline nullpunkti suhtes, s.t. $-x \in D$ iga $x \in D$ korral. Funktsiooni f nimetatakse
1) *paarisfunktsiooniks*, kui $f(-x) = f(x)$ iga $x \in D$ korral,
2) *paarituks funktsiooniks*, kui $f(-x) = -f(x)$ iga $x \in D$ korral.
Näiteks absoluutväärtus on paaris-, signum-funktsioon aga paaritu funktsioon. Paarisfunktsiooni graafik on xy-tasandil sümmeetriline y-telje suhtes, paaritu funktsiooni graafik aga nullpunkti suhtes (kontrollida!)✠.

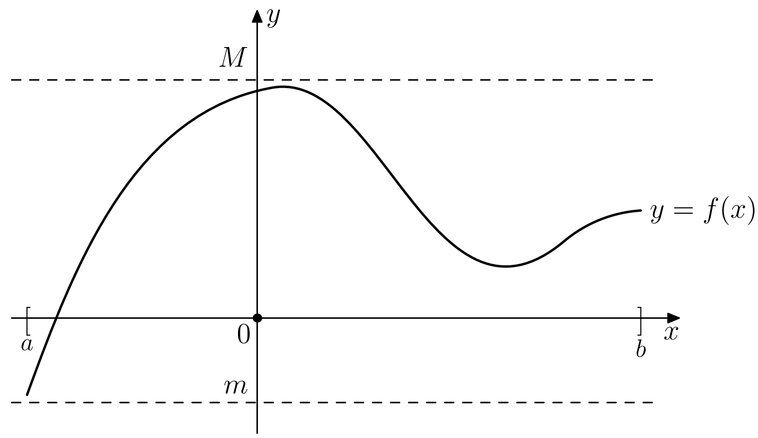
Tõkestatud funktsioonid. Definitsioon. Ütleme, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on *alamhulgas $X \subset D$ tõkestatud*, kui väärtuste hulk $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$ on tõkestatud, s.t.

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \le f(x) \le M \text{ iga } x \in X \text{ korral.} \tag{2.1}$$

Lihtne on näha (vt. joonis 2.7), et tingimust (2.1) rahuldava tõkestatud funktsiooni graafik paikneb xy-tasandil ribas

$$\{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\, m \leq y \leq M\}\,.$$

Joonis 2.7 illustreerib seda lõigus $[a,b]$ tõkestatud funktsiooni puhul.



Joonis 2.7: Tõkestatud funktsiooni graafik.

Märgime veel, et (2.1) on samaväärne tingimusega

$$\exists K > 0 : |f(x)| \leq K \text{ iga } x \in X \text{ korral}$$

(kontrollida!✠; vrd. tingimused (1.4) ja (1.5) eelmises peatükis).

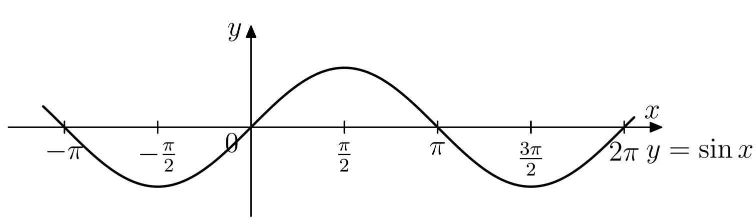
Näide 2.2. Siinusfunktsioon

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\;\; f(x) := \sin x$$

ja koosinusfunktsioon

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\;\; f(x) := \cos x$$

on tõkestatud, kuna mõlemal juhul $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$ (vt. joonised 2.8 ja 2.9).

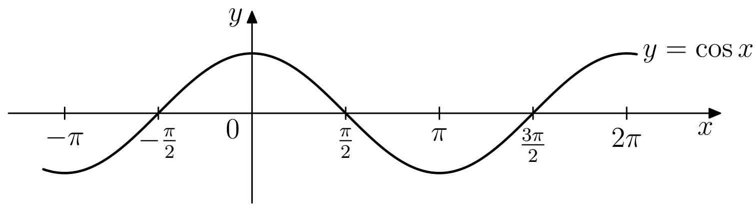


Joonis 2.8: Siinusfunktsioon $y = \sin x$.

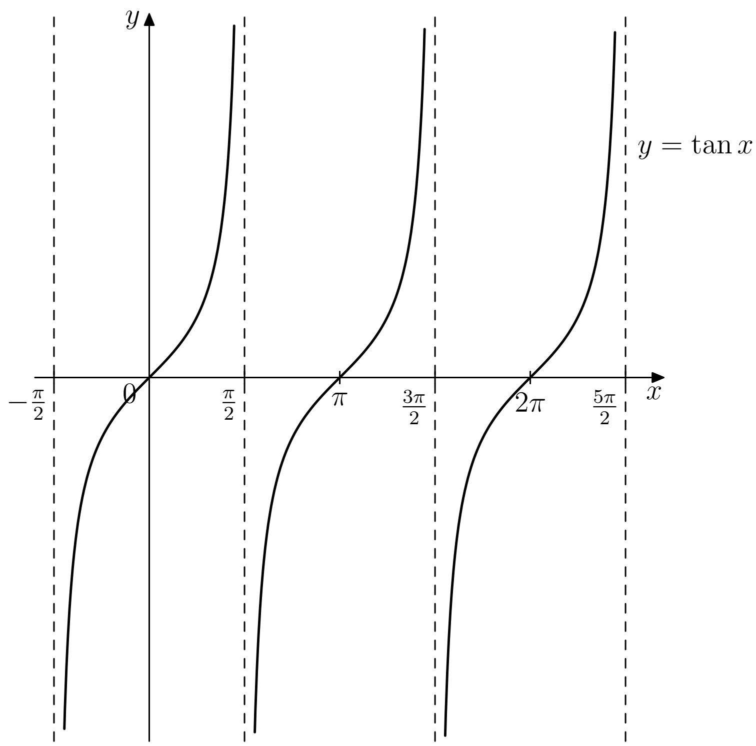
Seevastu tangensfunktsiooni

$$f : \mathbb{R}\diagdown\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R},\;\; f(x) := \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

väärtuste hulk ei ole tõkestatud, täpsemalt, $f\left(\mathbb{R}\diagdown\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right) = \mathbb{R}$ (vt. joonis 2.10).



Joonis 2.9: Koosinusfunktsioon $y = \cos x$.



Joonis 2.10: Tangensfunktsioon $y = \tan x$.

Kuna $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, siis $\tan(-x) = -\tan x$ suvalise $x \in \mathbb{R}$ puhul, seega on siinus- ja tangensfunktsioon paaritud, koosinusfunktsioon aga paarisfunktsioon.

Funktsiooni ekstremaalsed väärtused. Kui funktsioon f on hulgas $X \subset D$ tõkestatud, siis väärtuste hulk $f(X)$ on nii ülalt kui alt tõkestatud, mistõttu pidevuse aksioomi ning lause 1.5 põhjal eksisteerivad $\sup f(X)$ ja $\inf f(X)$. Erijuhul, kui hulgas $f(X)$ on olemas suurim või vähim element, siis neid nimetatakse vastavalt funktsiooni f *suurimaks* ja *vähimaks* (ka *maksimaalseks* ja *minimaalseks*) *väärtuseks hulgas* X. Seejuures, kui $x_1 \in X$ ja $\max f(X) = f(x_1)$, s.t.

$$f(x) \leq f(x_1) \text{ iga } x \in X \text{ korral,}$$

siis öeldakse, et funktsioon f saavutab hulgas $X \subset D$ suurima väärtuse kohal x_1. Kui $x_2 \in X$ ja

$$f(x) \geq f(x_2) \text{ iga } x \in X \text{ korral,}$$

siis $\min f(X) = f(x_2)$ ning funktsioon f saavutab hulgas $X \subset D$ vähima väärtuse kohal x_2. Suurima ja vähima väärtuse puhul kõneldakse selle funktsiooni *ekstremaalsetest* väärtustest.

Tehted funktsioonidega. Olgu f ja g hulgas $D \subset \mathbb{R}$ määratud funktsioonid, s.t. $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$. Defineerime uued funktsioonid

$$\begin{aligned} f+g\colon D \to \mathbb{R},\ & (f+g)(x) := f(x)+g(x) \ \text{(funktsioonide } f \text{ ja } g \ \textit{summa}\text{)},\\ f-g\colon D \to \mathbb{R},\ & (f-g)(x) := f(x)-g(x) \ \text{(funktsioonide } f \text{ ja } g \ \textit{vahe}\text{)},\\ \lambda f\colon D \to \mathbb{R},\ & (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \ \text{(funktsiooni } f \ \lambda\textit{-kordne}, \lambda \in \mathbb{R}\text{)},\\ fg\colon D \to \mathbb{R},\ & (fg)(x) := f(x)\,g(x) \ \text{(funktsioonide } f \text{ ja } g \ \textit{korrutis}\text{)},\\ \frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R},\ & \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \ \text{(funktsioonide } f \text{ ja } g \ \textit{jagatis}\text{)}, \end{aligned}$$

viimasel juhul eeldame, et $g(x) \neq 0$ kõikide $x \in D$ korral. Nendega seotud arvutusvalemite kohta märgime, et

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$$

iga $x \in D$ korral (selgitada!)✠, s.t. $f+g = g+f$. Analoogiliselt veendutakse, et

$$fg = gf,\ \ (f+g)+h = f+(g+h),\ \ (fg)\,h = f(gh),\ \ f(g+h) = fg+fh$$

suvaliste hulgas D määratud funktsioonide f, g ja h puhul (kontrollida!)✠.

Liitfunktsioon. Definitsioon. Olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $h : E \to \mathbb{R}$ sellised funktsioonid, et $f(D) \subset E$. Funktsiooni

$$h \circ f\colon D \to \mathbb{R},\ h \circ f(x) := h(f(x))$$

nimetatakse funktsioonide f ja h *liitfunktsiooniks* ehk *kompositsiooniks.*

Näide 2.3. Funktsioon $y = 1 + \sqrt{4-3x}$ on funktsioonide

$$f\colon \left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \to \mathbb{R},\ \ f(x) := 4-3x$$

ja

$$h\colon\ [0,\infty) \to \mathbb{R},\ \ h(x) := 1+\sqrt{x}$$

kompositsioon $h \circ f\colon\ \left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \to \mathbb{R}$.

Näide 2.4. Kui $h(x) := x^2+1$ ja $f(x) := \sqrt{x-1}$, siis

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = (f(x))^2 + 1 = (x-1)+1 = x$$

iga $x \in [1,\infty)$ korral. Seega $h \circ f\colon\ [1,\infty) \to [1,\infty)$ on identsusfunktsioon intervallis $[1,\infty)$.

2.2 Arvjadad, nende koonduvus

Definitsioon. *Arvjadaks* nimetatakse funktsiooni, mille määramispiirkonnaks on kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$.

Selline funktsioon $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ seab igale naturaalarvule n vastavusse reaalarvu $x(n)$, mis tavaliselt kirjutatakse kujul x_n. Neid funktsiooni väärtusi x_n nimetatakse arvjada x *liikmeteks*, naturaalarve $n \in \mathbb{N}$ aga *indeksiteks*. Arvjada x ennast tähistame sümboliga (x_n), kasutame ka tähistust $(x_1, x_2, \dots)$. Tavaliselt ütleme *arvjada* asemel lihtsalt *jada*.

Rõhutame, et oluline on eristada jada $(x_1, x_2, \dots)$ ja tema liikmete hulka $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Jadas on alati lõpmata palju (täpsemalt loenduv arv) liikmeid, kuigi tema liikmete hulk võib olla lõplik. Näiteks jada $(0, 1, 0, 1, \dots)$ liikmete hulk $\{0, 1\}$ koosneb vaid kahest elemendist.

Mõnikord on otstarbekam võtta indeksite hulgaks $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, sel juhul saame jada $(x_0, x_1, x_2, \dots)$.

Tõkestatud jadad. Tõkestatud funktsiooni definitsiooni kohaselt (vrd. tingimus (2.1)) on jada (x_n) tõkestatud parajasti siis, kui

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \; : m \leq x_n \leq M \text{ iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral,}$$

selle tingimuse võime esitada kujul

$$\exists K > 0 : |x_n| \leq K \text{ iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Koonduvad jadad. Definitsioon. (a) Arvu a nimetatakse jada (x_n) *piirväärtuseks* (kirjutame kas $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ või $x_n \to a$), kui

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

(b) Öeldakse, et lõpmatuspunkt ∞ on jada (x_n) piirväärtus (kirjutame $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ või $x_n \to \infty$), kui

$$\forall M > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n > M. \tag{2.3}$$

Analoogiliselt, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (ehk $x_n \to -\infty$) tähendab, et

$$\forall M > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n < -M.$$

(c) Kui jadal on lõplik piirväärtus, siis nimetatakse seda jada *koonduvaks*, mittekoonduvat jada nimetatakse *hajuvaks*.

Seega on hajuvad sellised jadad, millel ei ole piirväärtust (näiteks $(0, 1, 0, 1, \dots)$ (vt. näide 2.7 allpool)) või mille piirväärtuseks on üks lõpmatuspunktidest ∞ ja $-\infty$ (näiteks $(1, 2, 3, \dots)$).

Kõige lihtsam koonduv jada on *konstantne jada* $(a, a, \dots)$, s.t. jada (x_n), kus $x_n = a$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Siis suvalise $\varepsilon > 0$ puhul

$$|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon \;\text{ iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral,}$$

piirväärtuse definitsiooni põhjal $x_n \to a$.

Võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$ piirväärtuse definitsioonis (2.2) on vastavalt lauses 1.11 esitatud absoluutväärtuse omadusele samaväärne tingimusega $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ ehk $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ (selgitada!)✠, niisiis saame tingimuse (2.2) esitada kujul

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Siit tuleneb jada piirväärtuse ***geomeetriline tähendus***: *jada (x_n) koondub arvuks a parajasti siis, kui punkti a iga ümbruse $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ korral leidub selline indeks N, et $x_n \in U_\varepsilon(a)$ kõikide $n \geq N$ puhul.*

Näide 2.5. Näitame, et jada $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, kus $\alpha > 0$, koondub arvuks 0. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, võtame $N := \left[\frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}\right] + 1$ ($\left[\frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}\right]$ on arvu $\frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}$ täisosa, seega $N \in \mathbb{N}$). Kui $n \in \mathbb{N}$ ja $n \geq N$, siis $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$ ning

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{N^\alpha} < \left(\varepsilon^{1/\alpha}\right)^\alpha = \varepsilon$$

(selgitada!)✠. Niisiis, kui fikseeritud arvu $\varepsilon > 0$ korral võtta $N := \left[\frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}\right] + 1$, siis kehtib implikatsioon

$$n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon,$$

piirväärtuse definitsiooni (2.2) kohaselt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ juhul $\alpha > 0$.

Näide 2.6. Näitame, et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{3-n^2} = -1$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, meie eesmärgiks on veenduda sellise $N \in \mathbb{N}$ olemasolus, et $\left|\frac{n^2+2}{3-n^2} - (-1)\right| < \varepsilon$ iga $n \geq N$ korral.

Paneme tähele, et kõigi indeksite $n \geq 2$ korral $n^2 > 3$. Sel juhul, kui tähistada $x_n := \frac{n^2+2}{3-n^2}$, siis

$$|x_n - (-1)| = |x_n + 1| = \left|\frac{n^2 + 2 + 3 - n^2}{3 - n^2}\right| = \left|\frac{5}{3 - n^2}\right| = \frac{5}{n^2 - 3}$$

ja tingimus $|x_n - (-1)| < \varepsilon$ on täidetud parajasti siis, kui $n^2 > \frac{5}{\varepsilon} + 3$ ehk $n > \sqrt{\frac{5}{\varepsilon} + 3}$.

Olgu $N := \left[\sqrt{\frac{5}{\varepsilon} + 3}\,\right] + 1$, kui $n \geq N$, siis $|x_n - (-1)| < \varepsilon$ (selgitada!)✠, piirväärtuse definitsiooni (2.2) kohaselt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{3-n^2} = -1$.

Näide 2.7. Veendume, et jadal $(x_n) := ((-1)^n) = (-1, 1 - 1, 1, \ldots)$ ei ole piirväärtust. Selge, et lõpmatuspunktid ∞ ja $-\infty$ ei saa olla vaadeldava jada piirväärtuseks. Oletame *vastuväiteliselt*, et $x_n \to a$, kus $a \in \mathbb{R}$. Võtame $\varepsilon := 1$, definitsiooni kohaselt leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $|x_n - a| < 1$ ehk $-1 < a - x_n < 1$ kõikide $n \geq N$ korral. Seega peavad korraga olema täidetud tingimused

$$-1 < a - 1 < 1 \ \text{ ehk } \ 0 < a < 2$$

ja

$$-1 < a + 1 < 1 \ \text{ ehk } \ -2 < a < 0$$

(selgitada!)✠, mis ei ole võimalik. Saadud vastuolu kinnitab, et jadal $((-1)^n)$ ei ole piirväärtust.

Tegelikult saab samamoodi veenduda, et suvaliste arvude $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ puhul, kus $\alpha \neq \beta$, ei ole jadal $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$ piirväärtust (iseseisvalt!)✠.

2.3 Koonduvate jadade omadused

Koonduvate jadade omaduste kirjeldamist alustame **koonduvuse ja tõkestatuse vahekorra** selgitamisega.

Lause 2.1 *Iga koonduv jada on tõkestatud.*

Tõestus. Olgu $x_n \to a$, s.t. iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline (arvust ε sõltuv) $N \in \mathbb{N}$, et $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ iga $n \geq N$ puhul. Võtame $\varepsilon := 1$ ja leiame sellise $N \in \mathbb{N}$, et

$$a - 1 < x_n < a + 1, \text{ kui } n \geq N.$$

Teatavasti on igas lõplikus arvude hulgas nii suurim kui vähim element, järelikult eksisteerivad

$$m := \min\{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, a - 1\} \text{ ja } M := \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, a + 1\}.$$

Seejuures $m \leq x_n \leq M$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral (selgitada!)✠, s.t. (x_n) on tõkestatud jada. ■

Lause 2.2 *Kui $x_n \to 0$ ja (y_n) on tõkestatud jada, siis $x_n y_n \to 0$.*

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Meie eesmärk on leida selline $N \in \mathbb{N}$, et

$$|x_n y_n| = |x_n y_n - 0| < \varepsilon \text{ iga } n \geq N \text{ korral.}$$

Kuna (y_n) on tõkestatud jada, siis leidub selline $K > 0$, et

$$|y_n| \leq K \text{ iga } n \in \mathbb{N} \text{ puhul.} \tag{2.4}$$

Eelduse $x_n \to 0$ kohaselt saame valida $N \in \mathbb{N}$ niimoodi, et

$$|x_n| = |x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{K} \text{ iga } n \geq N \text{ korral} \tag{2.5}$$

(põhjendada!)✠. Tingimustest (2.4) ja(2.5) saamegi, et $|x_n y_n| = |x_n|\,|y_n| < \frac{\varepsilon}{K}K = \varepsilon$, kui $n \geq N$. Lause on tõestatud. ■

Järgmine lause esitab põhimõtteliselt tähtsa fakti: **igal koonduval jadal on vaid üks piirväärtus**.

Lause 2.3 *Koonduva jada piirväärtus on üheselt määratud: kui $x_n \to a$ ja $x_n \to b$, siis $a = b$.*

Tõestus. Eeldame, et $x_n \to a$ ja $x_n \to b$, olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Meie eesmärk on näidata, et $|a - b| < \varepsilon$: kuna sel juhul mittenegatiivne arv $|a - b|$ on väiksem igast positiivsest arvust, siis see tähendab, et $|a - b| = 0$ ehk $a = b$.

Vastavalt piirväärtuse definitsioonile leiame sellised $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, et

$$n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ja } n \geq N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kui $n := \max\{N_1, N_2\}$, siis tänu absoluutväärtuse kolmnurgaomadusele (vt. lause 1.12(a))

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Väide on tõestatud. ■

Järgnevad kaks lauset kirjeldavad jada piirväärtuse **järjestusega seotud omadusi**.

Lause 2.4 *Olgu (x_n) ja (y_n) sellised koonduvad jadad, et*
1) $x_n \to a$,
2) $y_n \to b$ ja
3) leidub niisugune $N_0 \in \mathbb{N}$, et $x_n \leq y_n$, kui $n \geq N_0$.
Siis $a \leq b$.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $a > b$, ja veendume, et see oletus viib vastuolule.

Võtame $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$, siis $\varepsilon > 0$. Kuna $x_n \to a$ ja $y_n \to b$, siis vastavalt piirväärtuse definitsioonile saame valida niisugused $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, et

$$n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \text{ ja } n \geq N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon$$

ehk

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \text{ kui } n \geq N_1, \text{ ja } b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon, \text{ kui } n \geq N_2. \tag{2.6}$$

Olgu $n := \max\{N_0, N_1, N_2\}$. Kuna

$$b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon,$$

siis seostest (2.6) saame, et

$$y_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < x_n$$

(selgitada!)✠, mis on vastuolus eeldusega 3) (peame silmas, et $n \geq N_0$). Väide on tõestatud. ■

Lause 2.5 *Kui $x_n \to a$ ja $y_n \to a$ ning seejuures leidub selline $N_0 \in \mathbb{N}$, et*

$$x_n \leq z_n \leq y_n \textit{ iga } n \geq N_0 \textit{ korral,}$$

siis $z_n \to a$.

Tõestus. Eeldame, et

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \text{ kui } n \geq N_0, \tag{2.7}$$

ning $x_n \to a$ ja $y_n \to a$, olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Piirväärtuse definitsiooni kohaselt on meie eesmärgiks tõestada niisuguse $N \in \mathbb{N}$ olemasolu, et kehtiks tingimus

$$|z_n - a| < \varepsilon \text{ iga } n \geq N \text{ korral.} \tag{2.8}$$

Vastavalt eeldusele $x_n \to a$ leiame $N_1 \in \mathbb{N}$ omadusega

$$n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Analoogiliselt, kuna $y_n \to a$, siis leidub $N_2 \in \mathbb{N}$, et

$$n \geq N_2 \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon.$$

Võtame $N := \max\{N_0, N_1, N_2\}$. Kui $n \geq N$, siis $|x_n - a| < \varepsilon$ ja $|y_n - a| < \varepsilon$, teisisõnu, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ ning $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$. Pidades silmas võrratusi (2.7), saame, et

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \text{ iga } n \geq N \text{ puhul.}$$

Seega $|z_n - a| < \varepsilon$, kui $n \geq N$, niisiis kehtib (2.8). ■

Koonduvate jadade omaduste kirjeldamise lõpetame lausega **tehetega seotud omadustest**. Seejuures piirdume vaid ühe omaduse tõestusega.

Lause 2.6 *Kui $x_n \to a$ ja $y_n \to b$, siis*
(a) $x_n + y_n \to a + b$,
(b) $x_n y_n \to ab$,
(c) $\lambda y_n \to \lambda b$ *iga* $\lambda \in \mathbb{R}$ *puhul,*
(d) $x_n - y_n \to a - b$,
(e) $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}$ *(eeldusel, et $b \neq 0$),*
(f) $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ *(eeldusel, et $b \neq 0$).*

Tõestus. Tõestame siinkohal vaid väite (a). Eeldame, et $x_n \to a$ ja $y_n \to b$, olgu $\varepsilon > 0$. Meie eesmärgiks on veenduda, et leidub $N \in \mathbb{N}$ omadusega

$$n \geq N \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon.$$

Kuna $x_n \to a$ ja $y_n \to b$, siis leiduvad sellised $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, et

$$n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ja } n \geq N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seega iga $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ korral

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(selgitada!)✠, s.t. $x_n + y_n \to a + b$. ■

2.4 Tähtsad piirväärtused

Kõigi järgnevate tähtsate piirväärtuste leidmisel on aluseks *binoomvalem*

$$(u+v)^n = u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}v^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{n-k}v^k + \cdots + nuv^{n-1} + v^n,$$

kus $u, v \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Juhul $u = 1$ ja $v > 0$ saame valemist

$$(1+v)^n = 1 + nv + \frac{n(n-1)}{2}v^2 + \cdots + v^n$$

võrratused

$$(1+v)^n > nv \tag{2.9}$$

ning

$$(1+v)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}v^2 \tag{2.10}$$

(selgitada!)✠.

Lause 2.7 *Kui $0 \leq a < \infty$, siis*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{kui } 0 \leq a < 1, \\ 1, & \text{kui } a = 1, \\ \infty, & \text{kui } a > 1. \end{cases}$$

Tõestus. Juhtudel $a = 0$ ja $a = 1$ on jada (a^n) konstantne, sel juhul väide kehtib. Kui $0 < a < 1$, siis $\frac{1}{a} > 1$ ning $v := \frac{1}{a} - 1 > 0$, valemi (2.9) kohaselt

$$\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = (1+v)^n > nv,$$

mistõttu $0 < a^n < \frac{1}{nv}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Kuna $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{nv} = \frac{1}{v} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, siis lause 2.5 põhjal $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ (selgitada!)✠.

Kui $a > 1$, siis $v := a - 1 > 0$ ja valemist (2.9) saame, et

$$a^n = (1+v)^n > nv$$

kõikide $n \in \mathbb{N}$ puhul, mistõttu $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ (põhjendada!)✠. ■

Lause 2.8 *Kui* $0 < a < \infty$*, siis*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Tõestus. Kui $a = 1$, siis väide ilmselt kehtib. Olgu $a > 1$, siis ka $\sqrt[n]{a} > 1$ (selgitada!)✠, seega $\sqrt[n]{a} = 1 + v_n$, kus $v_n := \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral. Seose (2.9) tõttu

$$a = (1+v_n)^n > nv_n \text{ ehk } 0 < v_n < a\frac{1}{n} \text{ iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Siit saame tänu lausele 2.5, et $v_n \to 0$ ehk $\sqrt[n]{a} \to 1$ protsessis $n \to \infty$.

Kui $a < 1$, siis $b := \frac{1}{a} > 1$, mistõttu eelneva arutelu põhjal $\sqrt[n]{b} \to 1$ ning

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = 1.$$

Väide on tõestatud. ■

Lause 2.9 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Tõestus. Kuna $\sqrt[n]{n} > 1$, siis $v_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ ehk $\sqrt[n]{n} = 1 + v_n$ iga $n = 2, 3, \ldots$ korral. Valemi (2.10) kohaselt

$$n = (1+v_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} v_n^2 \text{ ehk } v_n^2 < \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}, \text{ kui } n = 2, 3, \ldots.$$

Niisiis, $0 < v_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$, lause 2.5 põhjal. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (põhjendada!)✠. ■

Tõestuseta esitame järgmise tähtsa väite.

Lause 2.10 *Jadal* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ *eksisteerib piirväärtus*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e.$$

Arvu $e = 2,71828182845\ldots$ nimetatakse *Euleri arvuks.* Arv e on irratsionaalarv, ta on *naturaallogaritmi alus,* s.t. $\log_e a =: \ln a$.

Kokkuvõte

Definitsiooni kohaselt on jada selline funktsioon, mille määramispiirkonnaks on kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$. Niisiis, kui igale naturaalarvule $n \in \mathbb{N}$ vastab üheselt määratud arv $x_n \in \mathbb{R}$, siis on määratud jada, mida me tähistame kas (x_n) või $(x_1, x_2, ...)$. Jada (x_n) nimetatakse tõkestatuks, kui tema liikmete hulk $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on tõkestatud. Kui jada (x_n) liikmed protsessis $n \to \infty$ piiramatult lähenevad mingile arvule $a \in \mathbb{R}$, siis öeldakse, et ta koondub piirväärtuseks a (vt. definitsioon (2.2)). Hajuvate (s.o. mittekoonduvate) jadade hulgas on erilisel kohal jadad, mille piirväärtus on kas ∞ või $-\infty$ (vt. definitsioon (2.3)).

Koonduvatel jadadel on rida tähelepanuväärseid omadusi:

- koonduv jada on tõkestatud,
- tema piirväärtus on üheselt määratud,
- kui $x_n \to a$ ja $y_n \to b$ ning $x_n \leq y_n$ mingist indeksist N alates, siis $a \leq b$,
- kui $x_n \to a$ ja $y_n \to a$ ning $x_n \leq z_n \leq y_n$ mingist indeksist N alates, siis $z_n \to a$,
- kui $x_n \to a$ ja $y_n \to b$, siis $x_n \pm y_n \to a \pm b$, $x_n y_n \to ab$ ja $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ (viimasel juhul eeldame, et $b \neq 0$).

Järgnevates peatükkides mängivad olulist rolli järgmised väited:

- $a^n \to 0$, kui $0 \leq a < 1$, ja $a^n \to \infty$, kui $a > 1$,
- $\sqrt[n]{a} \to 1$,
- $\sqrt[n]{n} \to 1$,
- jada $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ on koonduv, tema piirväärtuseks on Euleri arv e (naturaallogaritmi alus).

3 Funktsiooni piirväärtus

Funktsioonide uurimisel taanduvad paljud probleemid küsimusele, milline on antud funktsiooni väärtuste muutumise iseloom argumendi vaadeldavate muutuste puhul. Selle küsimusega on seotud järgnevates peatükkides käsitletavad pidevus ja diferentseeruvus, mõlemad baseeruvad *piirväärtuse mõistele.* Käesoleva peatüki eesmärk on anda funktsiooni piirväärtuse definitsioon erinevate piirprotsesside korral, kirjeldada piirväärtuse omadusi ja temaga seotud arvutuseeskirju. Heine kriteerium (vt. teoreem 3.2) võimaldab selleks kasutada koonduvaid jadasid.

3.1 Funktsiooni piirväärtused

Piirväärtuse idee ja üldine definitsioon. Idee paremaks mõistmiseks vaatleme piirväärtust teatava protsessi – nimetame seda *piirprotsessiks* – lõpptulemusena. Arvu A loeme funktsiooni f piirväärtuseks kohal a (a on kas arv või lõpmatuspunkt), *kui argumendi x väärtuste piiramatul lähenemisel punktile a funktsiooni väärtused $f(x)$ lähenevad piiramatult arvule A*, lühidalt, kui

$$x \to a \Rightarrow f(x) \to A. \tag{3.1}$$

Tingimuste $x \to a$ ja $f(x) \to A$ matemaatiliselt korrektseks formuleerimiseks – neile üheselt mõistetava sisu andmiseks – kasutatakse punkti ümbruse mõistet. Meenutame, et
• arvu a ümbrusteks nimetatakse vahemikke $U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$, kus $\delta > 0$,
• lõpmatuspunktide ∞ ja $-\infty$ ümbrusteks vastavalt tõkestamata intervalle $U_N(\infty) = (N, \infty)$ ja $U_N(-\infty) = (-\infty, -N)$, kus $N > 0$.
Väljendi *muutuja x väärtused lähenenevad piiramatult punktile a* ehk $x \to a$ all mõistetakse järgmist tingimust: *punkti a **iga** ümbruse U korral on muutuja x muutumise protsessis selline moment (erinevate ümbruste korral on see reeglina erinev), millest alates $x \in U$.* Analoogiliselt mõistame ka protsessi $f(x) \to A$, kusjuures ka seda võime laiendada juhule, kus A on lõpmatuspunkt.

Protsessidele $x \to a$ ja $f(x) \to A$ antud sisu võimaldab tingimuse (3.1) sõnastada ***piirväärtuse üldise definitsioonina.***

Definitsioon. Punkti A nimetatakse *funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ piirväärtuseks punktis a*, kui punkti A ***iga*** ümbruse V korral ***saab valida*** punkti a sellise ümbruse U, et $f(x) \in V$ iga punktist a erineva $x \in U \cap D$ puhul, s.t.

$$x \in (U \setminus \{a\}) \cap D \Rightarrow f(x) \in V. \tag{3.2}$$

Funktsiooni lõplik piirväärtus antud punktis $a \in \mathbb{R}$. Tingimus $x \neq a$ eelnevas definitsioonis on lõpmatuspunkti puhul (s.t. juhul $a = \infty$ või $a = -\infty$) automaatselt täidetud, kuid ***arvu*** a korral on tal oluline tähendus. Ta garanteerib selle, et piirväärtuse olemasolu ning väärtus kohal a ei sõltu funktsiooni väärtusest selles punktis. Tänu tingimusele $x \neq a$ ei oma eelneva definitsiooni seisukohalt mingit tähtsust see, kas a on määramispiirkonna D element või mitte.

Küll aga peab punkti a igas ümbruses U leiduma arvust a erinevaid määramispiirkonna D punkte, vastasel juhul kehtiks implikatsioon (3.2) iga punkti A korral, s.t. iga punkt A oleks funktsiooni f piirväärtus kohal a. See tähelepanek on lähtekohaks järgmisele definitsioonile.

Definitsioon. Arvu a nimetatakse *hulga* $D \subset \mathbb{R}$ *kuhjumispunktiks,* kui

$$(U_\rho(a) \setminus \{a\}) \cap D \neq \varnothing \ \textbf{\textit{iga}} \ \rho > 0 \text{ korral,}$$

s.t. kui punkti a iga ümbrus, millest arv a ise on välja jäetud, sisaldab hulga D elemente.

Kuhjumispunkti definitsiooni juurde märgime, et
• kui D on suvaline ***intervall*** otspunktidega a ja b, kus $a < b$, siis hulga D kuhjumispunktideks on kõik arvud $x \in [a,b]$ (selgitada!)✠,
• kui $c \in D := (a,b)$, siis c on nii hulga $D \cap (-\infty, c)$ kui ka hulga $D \cap (c, \infty)$ kuhjumispunkt (põhjendada!)✠,
• arv 0 on mõlema hulga $\left\{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ ja $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ ainuke kuhjumispunkt (põhjendada!)✠.

Olgu a funktsiooni f määramispiirkonna D kuhjumispunkt. Eelpool toodud definitsiooni järgi on arv A funktsiooni f piirväärtus kohal a parajasti siis, kui arvu A iga ümbruse $U_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ korral leidub arvu a selline ümbrus $U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$, et

$$x \in D \cap (U_\delta(a) \setminus \{a\}) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

(vt. joonis 3.1). Pidades silmas, et

$$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$$

ja

$$|f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon),$$

saame nn. *ε-δ-keeles* esitada järgmise piirväärtuse definitsiooni.

Definitsioon. Olgu arv a hulga $D \subset \mathbb{R}$ kuhjumispunkt. Arvu A nimetatakse funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ *piirväärtuseks punktis* a (ehk *kohal* a) ja kirjutatakse $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$), kui iga positiivse (kuitahes väikese) arvu ε korral saab leida sellise $\delta > 0$, et kui argumendi väärtus x rahuldab tingimust

$$0 < |x - a| < \delta,$$

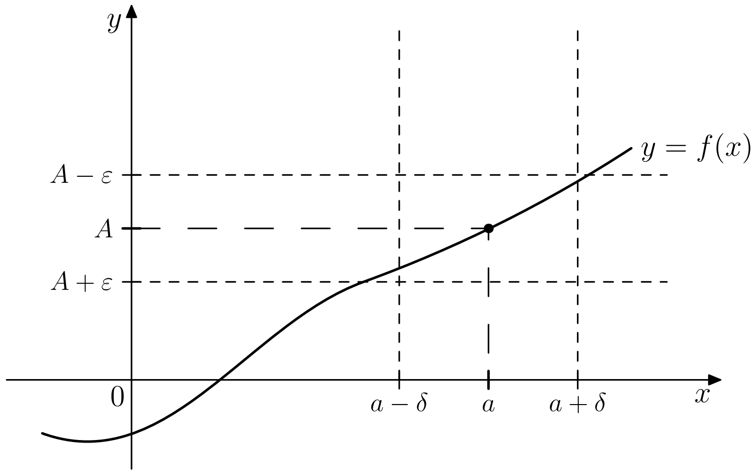
siis kehtib võrratus

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Niisiis,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : [x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Esitatud definitsiooniga seoses rõhutame, et
• $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ parajasti siis, kui $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - A) = 0$ (põhjendada!)✠,
• kuna a on määramispiirkonna D kuhjumispunkt, siis iga $\delta > 0$ puhul tõepoolest leidub funktsiooni f argumendi väärtusi $x \neq a$ omadusega $|x - a| < \delta$,
• piirväärtuse $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ olemasolu ja tema väärtus *ei sõltu funktsiooni väärtusest kohal* a, seetõttu võib funktsioonil f olla piirväärtus punktis a ka siis, kui f ei ole selles punktis määratud,



Joonis 3.1: Funktsiooni piirväärtus.

• kui $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, siis arv $\delta > 0$ seoses (3.3) sõltub arvust $\varepsilon > 0$. Üldjuhul, mida väiksem on etteantud $\varepsilon > 0$, seda väiksem $\delta > 0$ tuleb valida, et tingimus (3.3) kehtiks.

Näide 3.1. Näitame, et $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$, kui

$$f(x) := \begin{cases} x+2, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \\ 0, & \text{kui } x = 2. \end{cases}$$

Olgu ε ***suvaline*** positiivne arv. Meie eesmärgiks on veenduda, et ***leidub*** selline $\delta > 0$, mille korral tingimus

$$0 < |x-2| < \delta$$

garanteerib võrratuse $|f(x) - 4| < \varepsilon$. Paneme tähele, et kui $x \neq 2$, siis

$$|f(x) - 4| = |x-2|.$$

Seega, kui võtta $\delta := \varepsilon$, siis

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$$

ehk

$$[x \in (2-\delta, 2+\delta), \; x \neq 2] \Rightarrow f(x) \in (4-\varepsilon, 4+\varepsilon).$$

Me veendusime, et $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ sõltumata sellest, milline on funktsiooni f väärtus kohal 2. Veelgi enam, pole oluline kas arv 2 kuulub funktsiooni määramispiirkonda või mitte. Näiteks, kuna

$$g(x) := \frac{x^2-4}{x-2} = x+2 = f(x) \;\; \textbf{\textit{iga}} \;\; x \neq 2 \;\; \textbf{\textit{korral,}}$$

siis $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$ (peame silmas, et funktsiooni g määramispiirkonnaks on hulk $\mathbb{R} \setminus \{2\}$).

Näide 3.2. Näitame, et $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ iga $a > 0$ korral. Funktsiooni

$$y = \sqrt{x}$$

määramispiirkonnaks on intervall $D := [0, \infty)$, seega on iga positiivne arv a hulga D kuhjumispunkt (tema iga ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$ sisaldab positiivseid arve, s.o. hulga D elemente). Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, meie eesmärgiks on veenduda sellise positiivse δ olemasolus, et

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon,$$

kui

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Paneme tähele, et eeldusel $x \neq a$ võime kirjutada

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}},$$

seega

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

Võtame $\delta := \sqrt{a}\varepsilon$. Kui $0 < |x - a| < \delta$, siis

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

Definitsiooni kohaselt $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

Ühepoolsed piirväärtused. Me laiendame funktsiooni piirväärtuse mõistet antud punktis $a \in \mathbb{R}$ juhule, kus argumendi x väärtused lähenevad arvule a vaid ühelt poolt, märgime seda vastavalt $x \to a-$, kui $x < a$, ja $x \to a+$, kui $x > a$. Selliste piirväärtuste kirjeldamiseks defineerime kõigepealt punkti a ühepoolsed ümbrused.

Definitsioon. Arvu a *vasakpoolseks* ja *parempoolseks ümbruseks* loeme vastavalt intervalle

$$(a - \delta, a] =: U_\delta(a-) \quad \text{ja} \quad [a, a + \delta) =: U_\delta(a+),$$

kus δ on suvaline positiivne arv.

Tänu seostele

$$x \in U_\delta(a-) \setminus \{a\} \Leftrightarrow 0 < a - x < \delta,$$
$$x \in U_\delta(a+) \setminus \{a\} \Leftrightarrow 0 < x - a < \delta$$

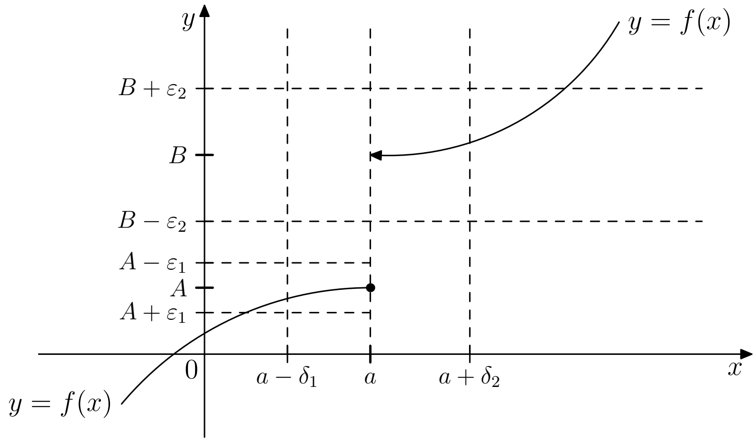
saame eespool esitatud üldisest piirväärtuse definitsioonist lähtudes vasak- ja parempoolse piirväärtuse mõiste.

Definitsioon. (a) Olgu $a \in \mathbb{R}$ hulga $D \cap (-\infty, a)$ kuhjumispunkt, s.t.

$$(a - \rho, a) \cap D \neq \varnothing \text{ iga } \rho > 0 \text{ korral.}$$

Öeldakse, et arv A on funktsiooni $f \colon D \to \mathbb{R}$ *vasakpoolne piirväärtus punktis* a, ning tähistatakse $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $\delta > 0$, et

$$[x \in D,\ 0 < a - x < \delta] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{3.4}$$



Joonis 3.2: Ühepoolsed piirväärtused.

(b) Olgu $a \in \mathbb{R}$ hulga $D \cap (a, \infty)$ kuhjumispunkt, s.t.

$$(a, a + \rho) \cap D \neq \varnothing \text{ iga } \rho > 0 \text{ korral.}$$

Öeldakse, et arv A on funktsiooni f *parempoolne piirväärtus punktis* a, ning tähistatakse $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $\delta > 0$, et

$$[x \in D,\ 0 < x - a < \delta] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Järgmisest näitest selgub et, *ühepoolsed piirväärtused antud punktis võivad olla erinevad.*

Näide 3.3. Olgu $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ signum-funktsioon, s.t.

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{kui } x > 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

Näitame, et $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$ ning $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna iga $x < 0$ puhul

$$|\operatorname{sgn} x - (-1)| = |(-1) + 1| = 0 < \varepsilon,$$

siis kehtib implikatsioon

$$0 < 0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - (-1)| < \varepsilon$$

täiesti suvaliselt valitud $\delta > 0$ korral. Seega $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$.

Võrdus $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ kontrollitakse samamoodi (iseseisvalt!)✠.

Situatsiooni, kus funktsiooni vasak- ja parempoolne piirväärtus antud punktis ei lange kokku, illustreerib ka joonis 3.2.

Piirväärtuse ja ühepoolsete piirväärtuste vahekord. Võrdleme vasakpoolse piirväärtuse definitsiooni piirväärtuse definitsiooniga (3.3). Paneme tähele, et

• kui $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ja a on hulga $D \cap (-\infty, a)$ kuhjumispunkt, siis $\lim_{x\to a-} f(x) = A$ (kontrollida!)✠,
• kui $\lim_{x\to a-} f(x) = A$ ja a ei ole hulga $D \cap (a, \infty)$ kuhjumispunkt, siis $\lim_{x\to a} f(x) = A$ (selgitada!)✠. Näiteks, kui funktsiooni f määramispiirkonnaks on intervall $(-\infty, 1)$, siis kehtib võrdus $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x)$ eeldusel, et üks neist piirväärtustest eksisteerib.

Analoogiline arutelu on õige muidugi ka parempoolse piirväärtuse puhul. Kui aga funktsiooni määramispiirkond, millest on välja jäetud punkt a, lõikub selle punkti ***iga*** vasakpoolse ja parempoolse ümbrusega, siis kehtib järgmine lause.

Lause 3.1 *Olgu a mõlema hulga $D \cap (-\infty, a)$ ning $D \cap (a, \infty)$ kuhjumispunkt. Piirväärtus $\lim_{x\to a} f(x)$ eksisteerib parajasti siis, kui mõlemad ühepoolsed piirväärtused $\lim_{x\to a-} f(x)$ ning $\lim_{x\to a+} f(x)$ eksisteerivad ja on võrdsed.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Olgu suvalise $\varepsilon > 0$ korral $\delta > 0$ valitud vastavalt tingimusele (3.3), siis on täidetud ka tingimused (3.4) ja (3.5) (selgitada!)✠, s.t. $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = A$.

Piisavus. Eeldame, et $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = A$, ja näitame, et $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline ja olgu arvud $\delta_1 > 0$ ning $\delta_2 > 0$ valitud vastavalt ühepoolsete piirväärtuste definitsioonidele (a) ja (b), s.t.

$$[x \in D,\ 0 < a - x < \delta_1] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

ja

$$[x \in D, 0 < x - a < \delta_2] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Kui argument x rahuldab tingimust

$$0 < |x - a| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\},$$

siis kas $0 < a - x < \delta \le \delta_1$ (kui $x < a$) või $0 < x - a < \delta \le \delta_2$ (kui $x > a$) (selgitada!)✠, seega mõlemal juhul kehtib võrratus $|f(x) - A| < \varepsilon$. Kokkuvõttes

$$[x \in D, 0 < |x - a| < \delta] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

niisiis, $\lim_{x\to a} f(x) = A$. ■

Näide 3.4. Leiame piirväärtuse $\lim_{x\to 2} f(x)$, kui

$$f(x) := \begin{cases} x + 2, & \text{kui } x < 2, \\ 6 - x, & \text{kui } x \ge 2. \end{cases}$$

Näite 3.1 ning lause 3.1 kohaselt $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (x + 2) = 4$ (selgitada!)✠. Näitame, et ka $\lim_{x\to 2+} (6 - x) = 4$, siis lause 3.1 põhjal $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, meie eesmärgiks on leida selline $\delta > 0$, et kui $0 < x - 2 < \delta$, siis

$$|x - 2| = |6 - x - 4| < \varepsilon.$$

Võtame $\delta := \varepsilon$, siis
$$0 < x - 2 < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| = |x - 2| < \varepsilon,$$
seega $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = 4$ ning kokkuvõttes $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

Piirväärtused lõpmatuspunktides. Järgnevad mõisted saadakse funktsiooni piirväärtuse üldisest definitsioonist, kui arvestada, et lõpmatuspunktide ∞ ja $-\infty$ ümbrused on vastavalt kujul $U_N(\infty) = (N, \infty)$ ja $U_N(-\infty) = (-\infty, -N)$, kus $N > 0$.

Definitsioon. (a) Olgu funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ määramispiirkond D ***ülalt tõkestamata hulk***, s.t.
$$(M, \infty) \cap D \neq \varnothing \text{ iga } M > 0 \text{ korral.}$$
Öeldakse, et arv A on vaadeldava funktsiooni f *piirväärtus lõpmatuspunktis* ∞ (kirjutatakse $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$), kui
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0 : [x \in D,\ x > N] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$
(b) Olgu funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ määramispiirkond D ***alt tõkestamata hulk***, s.t.
$$(-\infty, -M) \cap D \neq \varnothing \text{ iga } M > 0 \text{ korral.}$$
Öeldakse, et A on funktsiooni f *piirväärtus lõpmatuspunktis* $-\infty$ (lühidalt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$), kui
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0 : [x \in D,\ x < -N] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Näide 3.5. Näitame, et
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x} = 1.$$
Selge, et seosega $y = \frac{x+1}{x}$ määratud funktsiooni f määramispiirkond $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ on nii ülalt kui ka alt tõkestamata. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kui $x \to \infty$, võime eeldada, et $x > 0$, seega
$$|f(x) - 1| = \left|\frac{x+1}{x} - 1\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x},$$
ning võrratus $|f(x) - 1| < \varepsilon$ kehtib parajasti siis, kui $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Võtame $N := \frac{1}{\varepsilon}$, siis tingimus $x > N$ garanteerib võrratuse $|f(x) - 1| < \varepsilon$, s.t. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$.

Kui $x \to -\infty$, siis eeldame, et $x < 0$, seega
$$|f(x) - 1| = \left|\frac{x+1}{x} - 1\right| = -\frac{1}{x} = \frac{1}{-x}.$$
Olgu $N := \frac{1}{\varepsilon}$, tingimusel $x < -N$ ehk $-x > N > 0$ saame võrratuse $\frac{1}{-x} < \frac{1}{N} = \varepsilon$, s.t. $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Niisiis, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x} = 1$.

Märgime, et eelmises peatükis vaadeldud jada piirväärtus on erijuht funktsiooni piirväärtusest lõpmatuspunktis ∞ (selgitada!)✠. Teiseks paneme tähele olulist tõsisasja, et kui funktsiooni $f\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ puhul $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, siis $f(x_n) \to A$ protsessis $n \to \infty$ (põhjendada!)✠.

Lõpmatud piirväärtused. Seni defineerisime me erinevates protsessides funktsiooni piirväärtuse A kui arvu. Kuid alapunkti alguses esitatud üldine definitsioon võimaldab anda sisu ka seostele

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ ja } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

selleks vaatleme me punktina A esimesel juhul lõpmatuspunkti ∞, teisel juhul $-\infty$.

Definitsioon. Olgu a funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ määramispiirkonna D kuhjumispunkt.
(a) Ütleme, et ∞ *on funktsiooni f piirväärtus punktis a,* ning kirjutame $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, kui

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0 : [x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta] \Rightarrow f(x) > M.$$

(b) Ütleme, et $-\infty$ *on funktsiooni f piirväärtus punktis a,* ning kirjutame $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, kui

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0 : [x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta] \Rightarrow f(x) < -M.$$

Analoogiliselt defineeritakse lõpmatud piirväärtused protsessis $x \to a-$, $x \to a+$, $x \to \infty$ ja $x \to -\infty$ (iseseisvalt!)✠.

Näide 3.6. Olgu funktsioon f määratud valemiga $y := \frac{1}{2-x}$, siis tema määramispiirkonnaks on hulk $D := (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, punkt $a = 2$ on hulga D kuhjumispunkt. Näitame, et $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = -\infty$.

Olgu $M > 0$ suvaline, peame veenduma, et

$$0 < 2 - x < \delta_1 \Rightarrow \frac{1}{2-x} > M, \tag{3.6}$$

$$0 < x - 2 < \delta_2 \Rightarrow \frac{1}{2-x} < -M \tag{3.7}$$

mingite $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ puhul. Võrratus $\frac{1}{2-x} > M$ kehtib parajasti siis, kui $x < 2$ ja $2 - x < \frac{1}{M}$, s.t. kui $2 - \frac{1}{M} < x < 2$ ehk $0 < 2 - x < \frac{1}{M}$. Analoogiliselt saame, et $\frac{1}{2-x} < -M$ parajasti siis, kui $0 < x - 2 < \frac{1}{M}$. Seega võime seostes (10.3) ja (10.4) võtta $\delta_1 := \delta_2 := \frac{1}{M}$.

3.2 Funktsiooni piirväärtuse omadused

Vaatleme funktsioone f, g ja h, mis kõik on määratud hulgas $D \subset \mathbb{R}$, eeldame järgnevas (kuni käesoleva peatüki lõpuni), et $a \in \mathbb{R}$ on hulga D kuhjumispunkt. Funktsiooni piirväärtuse omaduste kirjeldamist alustame järgmise teoreemiga, mis võimaldab meil edaspidi rakendada eelmises peatükis esitatud koonduvate jadade omadusi. Seda teoreemi nimetame ***piirväärtuse Heine kriteeriumiks***, siinkohal esitame vaid tema tarvilikkuse osa tõestuse, tervenisti tõestatakse Heine kriteerium kursuses *Matemaatiline analüüs III.*

Teoreem 3.2 *Arv A on funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ piirväärtus punktis a parajasti siis, kui iga arvuks a koonduva argumendi väärtuste jada (x_n) korral, kus $x_n \neq a$, funktsiooni väärtuste jada $(f(x_n))$ koondub arvuks A. Teisisõnu, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ parajasti siis, kui kehtib implikatsioon*

$$[x_n \in D \setminus \{a\} \quad (n \in \mathbb{N}),\ \ x_n \to a] \Rightarrow f(x_n) \to A.$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Olgu (x_n) hulgas $D\setminus\{a\}$ selline punktide jada, mis koondub arvuks a, meie eesmärk on näidata, et $f(x_n) \to A$.

Olgu ε suvaline positiivne arv. Vastavalt funktsiooni piirväärtuse definitsioonile (3.3) leiame sellise $\delta > 0$, et

$$[x \in D\setminus\{a\}\,,\ 0 < |x - a| < \delta] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Kuna $x_n \to a$, siis jada piirväärtuse definitsiooni (2.2) kohaselt saame fikseerida niisuguse indeksi N, et $0 < |x_n - a| < \delta$ kõikide $n \geq N$ puhul. Tingimuse (3.8) põhjal

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \text{ iga } n \geq N \text{ korral,}$$

seega $f(x_n) \to A$ (vrd. (2.2)). ∎

Järgmise lause kohaselt on funktsiooni piirväärtus (kui ta eksisteerib) üheselt määratud. Selle tõestamisel demonstreerime, kuidas Heine kriteerium võimaldab eelpool tõestatud koonduvate jadade kohta käivad väited üle kanda funktsiooni piirväärtusele.

Lause 3.3 *Kui* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *ja* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$*, kus* $A, B \in \mathbb{R}$*, siis* $A = B$*.*

Tõestus. Eeldame, et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, olgu (x_n) selline arvjada, et $x_n \in D\setminus\{a\}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ja $x_n \to a$. Heine kriteeriumi põhjal tuleneb eeldusest $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, et $f(x_n) \to A$, samas saame eeldusest $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, et $f(x_n) \to B$. Kuid lause 2.3 kohaselt on koonduval jadal $(f(x_n))$ vaid üks piirväärtus, seega $A = B$. ∎

Analoogilist võtet kasutatakse ka järgmiste lausete tõestamisel.

Lause 3.4 *Olgu* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *ja* $g\colon D \to \mathbb{R}$ *sellised funktsioonid, et*
1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$*,*
2) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ *ja*
3) *leidub niisugune* $\delta > 0$*, et* $f(x) \leq g(x)$ *iga* $x \in (D\setminus\{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$ *korral.*
Siis $A \leq B$*.*

Järeldus 3.5 *Kui* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *on selline funktsioon, et*
1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *ja*
2) *leidub niisugune* $\delta > 0$*, et* $f(x) \leq B$ *iga* $x \in (D\setminus\{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$ *korral,*
siis $A \leq B$*.*

Lause 3.6 *Olgu* $f\colon D \to \mathbb{R}$*,* $g\colon D \to \mathbb{R}$ *ja* $h\colon D \to \mathbb{R}$ *sellised funktsioonid, et*
1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$*,*
2) *leidub niisugune* $\delta > 0$*, et* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *iga* $x \in (D\setminus\{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$ *korral.*
Siis $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$*.*

Tõestus. Eeldame, et tingimused 1) ja 2) on täidetud. Olgu (x_n) selline arvjada, et $a \neq x_n \in D$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ja $x_n \to a$, Heine kriteeriumi kohaselt on meie eesmärgiks näidata, et $h(x_n) \to A$ (selgitada!)✠.

Vastavalt jada piirväärtuse definitsioonile (2.2) saame valida sellise $N \in \mathbb{N}$, et $|x_n - a| < \delta$ kõikide $n \geq N$ korral. Niisiis,

$$n \geq N \Rightarrow a - \delta < x_n < a + \delta$$

ehk

$$x_n \in (D \setminus \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta), \text{ kui } n \geq N,$$

mistõttu eelduse 2) põhjal

$$n \geq N \Rightarrow f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n).$$

Kuna $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = A$, siis teoreemi 3.2 kohaselt $f(x_n) \to A$ ja $g(x_n) \to A$. Näeme, et jadad $(f(x_n))$, $(g(x_n))$ ning $(h(x_n))$ rahuldavad kõiki lause 2.5 tingimusi, selle kohaselt $h(x_n) \to A$. Lause on tõestatud. ■

Lause 3.7 *Kui* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ *ja* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, *siis*
(a) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B$,
(b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) g(x) = AB$,
(c) $\lim\limits_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda A$ *iga* $\lambda \in \mathbb{R}$ *puhul,*
(d) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = A - B$,
(e) $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ *(eeldusel, et* $B \neq 0$*) ja*
(f) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ *(eeldusel, et* $B \neq 0$*).*

Laused 3.3, 3.4 ja 3.7 ning järeldus 3.5, mis siin on sõnastatud piirväärtuste jaoks protsessis $x \to a$, kehtivad ka siis, kui $x \to a-$, $x \to a+$, $x \to -\infty$ või $x \to \infty$. Näiteks ühepoolsete piirväärtuste puhul kehtivad järgmised väited.

Lause 3.8 (a) *Kui*
1) $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$ *ja*
2) *leidub niisugune* $\delta > 0$, *et* $f(x) \leq B$ $(f(x) \geq B)$ *iga* $x \in D \cap (a - \delta, a)$ *korral,*
siis $A \leq B$ *(vastavalt* $A \geq B$*).*
(b) *Kui*
1) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$ *ja*
2) *leidub niisugune* $\delta > 0$, *et* $f(x) \leq B$ $(f(x) \geq B)$ *iga* $x \in D \cap (a, a + \delta)$ *korral,*
siis $A \leq B$ (*vastavalt* $A \geq B$).

Kokkuvõte

Piirväärtuste meetod on matemaatilise analüüsi põhiline uurimismeetod. Öeldakse, et A on funktsiooni f piirväärtus kohal a, kui $f(x) \to A$ protsessis $x \to a$. Implikatsioonile $x \to a \Rightarrow f(x) \to A$ üheselt mõistetava sisu andmiseks kasutatakse punkti ümbruse mõistet: punkti A iga ümbruse V korral leidub punkti a selline ümbrus U, et $f(U) \subset V$. Vaadeldes juhte, kus a ja A on kas arvud või lõpmatuspunktid ∞ ja $-\infty$, saame funktsioonide jaoks erinevat tüüpi piirväärtused.

Eelmises peatükis käsitletud jada piirväärtus on erijuht funktsiooni piirväärtusest juhul $x \to \infty$. Tänu jada lihtsa struktuuriga määramispiirkonnale $D = \mathbb{N}$ on tema piirväärtusega seotud omadused lihtsamini kirjeldatavad. Piirväärtuse Heine kriteerium võimaldab neid rakendada ülejäänud funktsioonide piirväärtuste omaduste uurimisel, seda demonstreerivad eespool lausete 3.3 ja 3.6 tõestused.

4 Pidevad funktsioonid

Pidevuse mõiste lähtekohaks matemaatikas on joone pidevus s.o. mittekatkevus. Lihtsustatult kõneldes, pidevateks nimetame neid funktsioone, mille graafik on pidev joon. Selle mõiste korrektseks esitamiseks ning analüütilise sisu kirjeldamiseks kasutatakse piirväärtuse mõistet.

4.1 Pideva funktsiooni mõiste ja omadused

Definitsioon. Olgu $a \in D$ hulga D kuhjumispunkt. Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimetatakse *pidevaks punktis* a (ehk *kohal* a), kui

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) .$$

Kui $a \in D$ on hulga $D \cap (-\infty, a)$ või hulga $D \cap (a, \infty)$ kuhjumispunkt ning kehtib vastavalt võrdus $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$ või $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$, siis kõneldakse vastavalt *vasakpoolsest* ja *parempoolsest pidevusest punktis* a.

Pidades silmas ε-δ-keeles esitatud piirväärtuse definitsiooni (3.3), saame järgmise väite: *funktsioon* f *on pidev oma määramispiirkonna* D *kuhjumispunktis* $a \in D$ *parajasti siis, kui*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : [x \in D,\ |x - a| < \delta] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Näide 4.1. Näitame, et funktsioon

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) := |x| = \begin{cases} x, & \text{kui } x \geq 0, \\ -x, & \text{kui } x < 0, \end{cases}$$

on pidev igas punktis $a \in \mathbb{R}$.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, võtame $\delta := \varepsilon$. Kui $|x - a| < \delta$, siis lause 1.12(c) kohaselt

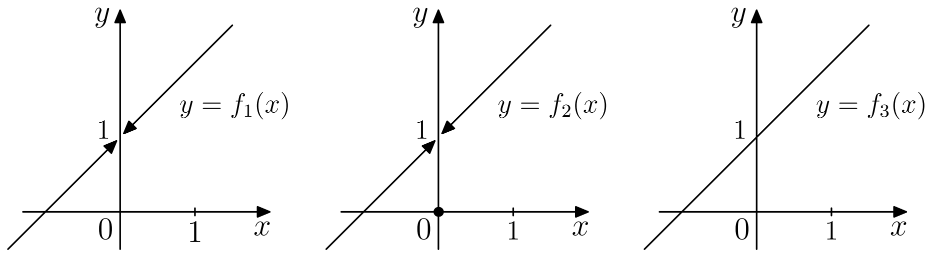
$$||x| - |a|| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon,$$

seega on funktsioon f pidev kohal a.

Näide 4.2. Vaatleme kolme funktsiooni f_1, f_2 ja f_3, mis on määratud vastavalt seostega

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= \frac{x^2-1}{x-1}, \\ f_2(x) &:= \begin{cases} x+1, & \text{kui } x \neq 1, \\ 0, & \text{kui } x = 1, \end{cases} \\ f_3(x) &:= x+1 \end{aligned}$$

(vt. joonis 4.1). Funktsiooni f_1 määramispiirkonnaks on hulk $D_1 := \mathbb{R} \setminus \{1\}$, funktsioonidel f_2 ja f_3 on selleks $D_2 := D_3 := \mathbb{R}$. Lihtne on näha, et
1) $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$ iga $x \in D_1$ korral ja
2) arv $a = 1$ on kõigil kolmel juhul määramispiirkonna kuhjumispunkt (selgitada!)✠.



Joonis 4.1: Näide 4.2.

Selge, et $\lim\limits_{x\to 1} f_i(x) = 2$ iga $i = 1, 2, 3$ puhul (kontrollida!)✠, seejuures on funktsioon f_3 pidev punktis $a = 1$ (veenduda!)✠. Funktsioonid f_1 ja f_2 ei ole selles punktis pidevad: f_1 ei ole kohal $a = 1$ määratud, funktsioon f_2 on küll määratud, kuid tema väärtus ja piirväärtus kohal 1 ei lange kokku.

Pidevuse seos vasak- ja parempoolse pidevusega. Ühelt poolt, kui f on nii vasakult kui ka paremalt pidev kohal a, siis

$$f(a) = \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$$

ning lause 3.1 kohaselt $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, s.t. funktsioon f on kohal a pidev.

Teisalt, olgu funktsioon f pidev oma määramispiirkonna D ***sisepunktis*** $a \in D$. Sel juhul on a loomulikult hulga D kuhjumispunkt, kuid ta on ka mõlema hulga $D \cap (-\infty, a)$ ja $D \cap (a, \infty)$ kuhjumispunkt. Kuna eelduse kohaselt $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, siis lause 3.1 põhjal $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$, s.t. f on kohal a nii vasakult kui paremalt pidev.

Kokkuvõttes tõestasime järgmise väite.

Lause 4.1 *Funktsioon on oma määramispiirkonna **sisepunktis** pidev parajasti siis, kui ta on selles punktis vasakult ja paremalt pidev.*

Näide 4.3. Olgu funktsioon $f\colon\ [0, 4] \to \mathbb{R}$ määratud seosega

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \in [0, 2], \\ (x-4)^2, & \text{kui } x \in (2, 4]. \end{cases}$$

Kuna

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} x^2 = 4 = f(2) \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (x-4)^2 = 4 = f(2),$$

siis on f punktis $a = 2$ paremalt ja vasakult pidev, seega on ta selles punktis pidev.

Näide 4.4. Olgu funktsioon $f\colon\ [0, 4] \to \mathbb{R}$ määratud seosega

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \in [0, 2], \\ (2x-3)^2, & \text{kui } x \in (2, 4]. \end{cases}$$

Siis

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} x^2 = 4 = f(2) \text{ ja } \lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (2x-3)^2 = 1 \neq f(2),$$

seega on f punktis $a = 2$ küll vasakult pidev, kuid ei ole selles punktis paremalt pidev.

Näide 4.5. Veendume, et ruutfunktsioon

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) := x^2$$

on pidev kohal $a = 1$.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaliselt fikseeritud. Meie eesmärk on leida selline $\delta > 0$, et kui $|x-1| < \delta$, siis $|x^2 - 1| < \varepsilon$ ehk $|x+1|\,|x-1| < \varepsilon$. Seejuures võime me eeldada, et otsitav $\delta > 0$ on piisavalt väike, nõuame, et $0 < \delta \leq 1$. Paneme tähele, et kui $|x-1| < \delta \leq 1$, siis

$$-1 < x - 1 < 1$$

ehk

$$1 < x + 1 < 3,$$

niisiis

$$|x+1| = x + 1 < 3. \tag{4.2}$$

Võtame $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$, olgu $|x-1| < \delta$. Kuna $|x-1| < 1$, siis kehtib võrratus (4.2). Samas $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$ ning kokkuvõttes

$$\left|x^2 - 1\right| = |x+1|\,|x-1| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tehted pidevate funktsioonidega. Lause 3.7 abil on lihtne tõestada järgmist lauset.

Lause 4.2 *Olgu funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ pidevad punktis a, siis ka funktsioonid $f+g$, $f-g$, λf, fg ja $\frac{f}{g}$ on punktis a pidevad (funktsiooni $\frac{f}{g}$ puhul eeldame, et $g(x) \neq 0$ iga $x \in D$ korral).*

Tõestus. Eeldame, et funktsioonid f ja g on kohal a pidevad, ja veendume, et ka nende korrutis fg on pidev selles punktis. Ülejäänud tehete puhul on tõestus samasugune (iseseisvalt!)✠.

Kuna eelduse kohaselt $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ja $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, siis

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} fg(x) &= \lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) \ \ \text{(lause 3.7}(b))\\ &= f(a)\,g(a) = fg(a)\,,\end{aligned}$$

mis tähendabki funktsiooni fg pidevust kohal a. ■

Näide 4.6. Polünoom

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

on igas punktis $a \in \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Tõepoolest,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)\\ &= a_n \lim_{x\to a} x^n + a_{n-1}\lim_{x\to a} x^{n-1} + \cdots + a_1 \lim_{x\to a} x + a_0 \ \text{(lause 3.7}(a),(c))\\ &= a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0 \ \text{(lause 3.7}(b))\\ &= f(a)\,.\end{aligned}$$

Näide 4.7. Olgu funktsioon f määratud seosega

$$y = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 5x + 6}.$$

Kuna $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ siis arvud 2 ja 3 on murru nimetaja nullkohad, seega funktsiooni f määramispiirkonnaks on $D := (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$. Murru lugeja ja nimetaja on polünoomid, seega on nad mõlemad pidevad igas punktis $a \in D$, lause 4.2 põhjal on funktsioon f (kui pidevate funktsioonide jagatis) pidev oma määramispiirkonna igas punktis.

Liitfunktsiooni pidevust kirjeldab järgmine väide.

Lause 4.3 *Olgu $a \in D$ hulga D kuhjumispunkt ning olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $h\colon E \to \mathbb{R}$ sellised funktsioonid, et $f(D) \subset E$. Kui f on pidev punktis a ja h on pidev punktis $b := f(a)$, siis liitfunktsioon $h \circ f : D \to \mathbb{R}$ on pidev punktis a.*

Tõestus. Rakendame eelmises peatükis toodud piirväärtuse Heine kriteeriumit (vt. teoreem 3.2). Olgu (x_k) selline jada, et $x_k \in D \diagdown \{a\}$ ja $x_k \to a$. Teoreemi 3.2 kohaselt on meie eesmärgiks näidata, et $h \circ f(x_k) \to h \circ f(a)$.

Funktsiooni f pidevusest punktis a järeldub, et

$$u_k := f(x_k) \to f(a) = b.$$

Seega järeldub funktsiooni h pidevusest punktis b koonduvus $h(u_k) \to h(b)$. Niisiis,

$$h \circ f(x_k)) = h(f(x_k)) = h(u_k) \to h(b) = h(f(a)) = h \circ f(a),$$

s.t. $h \circ f$ on pidev kohal a. ■

Katkevuspunktide klassifikatsioon. Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ *katkevuspunktiks* nimetatakse hulga D ***kuhjumispunkti*** a, milles f ei ole pidev. Kui katkevuspunktis a on funktsioonil f mõlemad lõplikud ühepoolsed piirväärtused, siis kõneldakse *esimest liiki katkevusest*, ülejäänud juhtude puhul *teist liiki katkevusest.* Kui esimest liiki katkevuse korral $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$ (seega eksisteerib $\lim\limits_{x \to a} f(x)$), kuid $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ või funktsioon f ei ole punktis a määratud (s.t. $a \notin D$)), siis öeldakse, et funktsioonil f on punktis a *kõrvaldatav katkevus*. Katkevuse kõrvaldamiseks määratakse funktsiooni väärtuseks punktis a tema piirväärtus $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Tegelikult tähendab selline katkevuse kõrvaldamine esialgse funktsiooni f asendamist uue funktsiooniga $\widetilde{f}$, kus

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{kui } x \in D \diagdown \{a\}, \\ \lim\limits_{x \to a} f(x), & \text{kui } x = a. \end{cases}$$

Näiteks on funktsioonidel f_1 ja f_2 näites 4.2 kohal $a = 1$ kõrvaldatav katkevus, sel juhul saab nad mõlemad asendada pideva funktsiooniga f_3 (selgitada!)✠.

Sellise esimest liiki katkevuse puhul, kus $\lim\limits_{x \to a+} f(x) - \lim\limits_{x \to a-} f(x) \neq 0$, nimetatakse seda vahet funktsiooni f *hüppeks* punktis a. Näiteks täisosa-funktsiooni $f(x) = [x]$ puhul on iga punkt $a \in \mathbb{Z}$ esimest liiki katkevuspunkt hüppega 1 (kontrollida!)✠.

4.2 Funktsiooni pidevus määramispiirkonna alamhulgas

Definitsioon. Olgu X funktsiooni f määramispiirkonna D alamhulk. Kui f on pidev igas punktis $x \in X$, siis öeldakse, et ta on *hulgas* X *pidev*. Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimetatakse *pidevaks*, kui ta on oma määramispiirkonnas D pidev.

Näiteks, funktsiooni $f\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}$ pidevus tähendab selle pidevust igas punktis x, kus $a \le x \le b$. Seejuures lõigu otspunktides a ja b kehtivad vastavalt seosed $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$ ja $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = f(b)$, seega on neis punktides sisuliselt tegemist vastavalt parem- ja vasakpoolse pidevusega.

Intervallis pideva funktsiooni omadused. Me esitame tõestuseta kolm olulist väidet intervallis pidevate funktsioonide kohta, nende tõestused antakse kursuses *Matemaatiline analüüs III.*

Teoreem 4.4 ***(Bolzano-Cauchy teoreem).*** *Pidev funktsioon teisendab intervalli intervalliks.*

Teoreem 4.5 ***(Weierstrassi esimene teoreem).*** *Lõigus* $[a, b]$ *pidev funktsioon* f *on selles lõigus tõkestatud, s.t.*

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \le f(x) \le M \ \textit{ iga } x \in [a, b] \ \textit{ korral.}$$

Teoreem 4.6 ***(Weierstrassi teine teoreem).*** *Lõigus* $[a, b]$ *pideval funktsioonil* f *on selles lõigus suurim ja vähim väärtus, s.t.*

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \ \textit{ iga } x \in [a, b] \ \textit{ korral.}$$

Rõhutame, et teoreemid 4.5 ning 4.6 ei pruugi jääda kehtima, kui asendada neis lõik mingi teist tüüpi intervalliga.

Pööratavad funktsioonid, pöördfunktsiooni pidevus. Kui $f\colon D \to \mathbb{R}$ on mingi funktsioon, siis vastab tema argumendi igale väärtusele $x \in D$ funktsiooni üheselt määratud väärtus $f(x) =: y$. Seevastu x ei pruugi olla ainuke arvule y vastav argumendi väärtus. Näiteks ruutfunktsiooni $y = x^2$ puhul vastavad funktsiooni väärtusele $y = 1$ argumendi väärtused -1 ja 1, siinusfunktsiooni $y = \sin x$ puhul kehtib iga $y \in [-1, 1]$ puhul võrdus $\sin x = y$ lõpmata paljude arvude x korral.

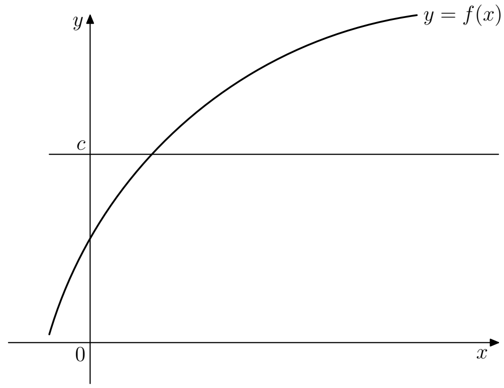
Definitsioon. Kui funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ igale väärtusele $y \in f(D)$ vastab ainult üks argumendi väärtus $x \in D$, siis ütleme, et funktsioon f on *pööratav.* Sel juhul funktsiooni

$$f^{-1}\colon f(D) \to D, \quad f^{-1}\ (y) := x, \text{ kus } y = f(x),$$

nimetatakse funktsiooni f *pöördfunktsiooniks.*

Pööratava funktsiooni geomeetriliseks tunnuseks on see, et iga x-teljega paralleelne sirge lõikab tema graafikut mitte rohkem kui ühes punktis (vrd. joonis 4.2). Seejuures on funktsioonil ja tema pöördfunktsioonil ühine graafik.

Osutub, et funktsiooni pööratavus on tihedalt seotud tema *monotoonsuseomadustega.*



Joonis 4.2: Pööratav funktsioon.

Definitsioon. Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimetatakse *alamhulgas* $X \subset D$
kasvavaks, kui võrratusest $x_1 < x_2$ hulgas X järeldub võrratus $f(x_1) \leq f(x_2)$,
rangelt kasvavaks, kui võrratusest $x_1 < x_2$ hulgas X järeldub võrratus $f(x_1) < f(x_2)$,
kahanevaks, kui võrratusest $x_1 < x_2$ hulgas X järeldub võrratus $f(x_1) \geq f(x_2)$,
rangelt kahanevaks, kui võrratusest $x_1 < x_2$ hulgas X järeldub võrratus $f(x_1) > f(x_2)$,
monotoonseks, kui ta on hulgas X kas kasvav või kahanev,
rangelt monotoonseks, kui ta on hulgas X kas rangelt kasvav või rangelt kahanev.

Näiteks täisosa-funktsioon $y = [x]$ on kogu määramispiirkonnas $\mathbb{R}$ kasvav, kuid ei ole rangelt kasvav (kontrollida!)✠. Ruutfunktsioon $y = x^2$ on intervallis $(-\infty, 0]$ rangelt kahanev ning intervallis $[0, \infty)$ rangelt kasvav.

Veendume, et iga rangelt monotoonne funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ on pööratav. Tõepoolest, kui mingi funktsiooni väärtuse $y \in f(D)$ korral $f(x_1) = f(x_2) = y$, siis $x_1 = x_2$, sest kui oletada, et $x_1 < x_2$, siis saaksime range võrratuse $f(x_1) < f(x_2)$ (rangelt kasvava funktsiooni f puhul) või $f(x_1) > f(x_2)$ (rangelt kahaneva funktsiooni f puhul). Niisiis, igale funktsiooni väärtusele y vastab täpselt üks argument $x_1 = x_2$, järelikult on f pööratav funktsioon.

Osutub, et rangelt kasvava funktsiooni $f : D \to R$ pöördfunktsioon $\varphi := f^{-1} : f(D) \to D$ on samuti rangelt kasvav. Et selles veenduda, oletame vastuväiteliselt, et φ ei ole rangelt kasvav. Siis leiduvad funktsiooni f sellised väärtused $y_1 = f(x_1)$ ja $y_2 = f(x_2)$, et $y_1 < y_2$, kuid $\varphi(y_1) \geq \varphi(y_2)$ ehk $x_1 \geq x_2$. Kuna f on rangelt kasvav funktsioon, siis $f(x_1) \geq f(x_2)$ ehk $y_1 \geq y_2$. Viimane võrratus on vastuolus lähte-eeldusega, järelikult vastuväiteline oletus $\varphi(y_1) \geq \varphi(y_2)$ ei kehti. Seega on rangelt kasvava funktsiooni pöördfunktsioon tõepoolest rangelt kasvav, samasugune väide kehtib ka rangelt kahaneva funktsiooni puhul.

Kokkuvõttes tõestasime me järgmise väite.

Lause 4.7 *Iga rangelt monotoonne funktsioon on pööratav. Seejuures on rangelt kasvava (rangelt kahaneva) funktsiooni pöördfunktsioon samuti rangelt kasvav (rangelt kahanev).*

Tõestuseta esitame järgmise tähelepanuväärse teoreemi, mis kirjeldab pöördfunktsiooni pidevust.

Teoreem 4.8 *Olgu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ **intervallis** D rangelt monotoonne ja pidev. Siis tema pöördfunktsioon f^{-1} on intervallis $f(D)$ pidev.*

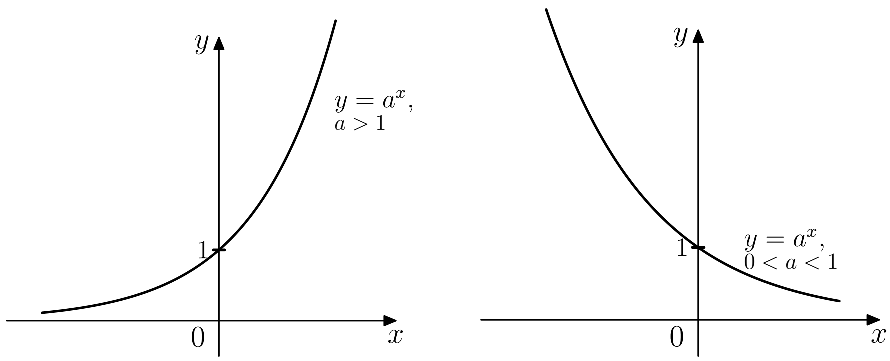
Elementaarfunktsioonid. *Põhilisteks elementaarfunktsioonideks* nimetatakse järgmisi funktsioone:
1) *konstantne funktsioon*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) := c,$$

kus c on mingi fikseeritud reaalarv, siis funktsiooni väärtuste hulk R koosneb ainsast punktist c, s.t. $R = \{c\}$,
2) *eksponentfunktsioon*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) := a^x,$$

kus $a > 0$, siis $R = (0, \infty)$,



Joonis 4.3: Eksponentfunktsioon $y = a^x$.

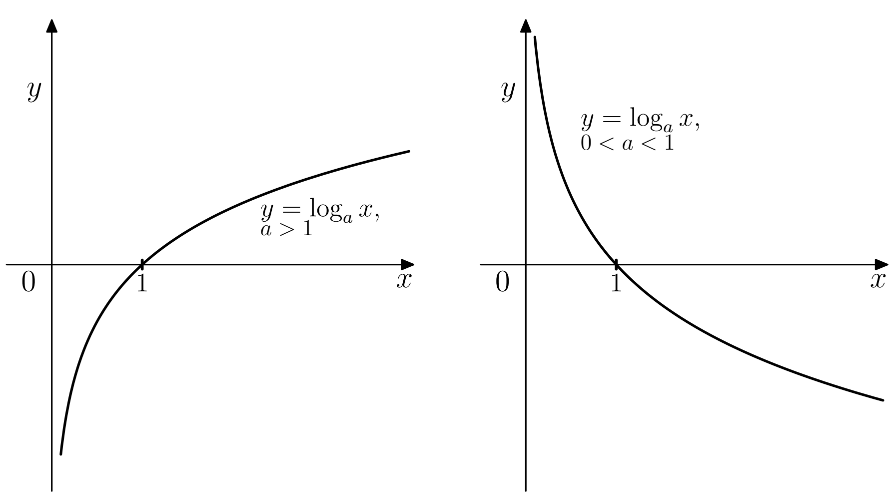
3) *logaritmfunktsioon*

$$f\colon\; (0, \infty) \to \mathbb{R}, \;\; f(x) := \log_a x,$$

kus $a > 0$, on eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon, siis $R = \mathbb{R}$; juhul $a := e$ nimetatakse arvu $\log_e x =: \ln x$ arvu $x > 0$ *naturaallogaritmiks*,
4) *astmefunktsioon*

$$f\colon\; (0, \infty) \to \mathbb{R}, \;\; f(x) := x^a := e^{a \ln x},$$

kus a on suvaline reaalarv, siis $R = (0, \infty)$.



Joonis 4.4: Logaritmfunktsioon $y = \log_a x$.

5) *siinus- ja koosinusfunktsioon*

$$y = \sin x \text{ ja } y = \cos x,$$

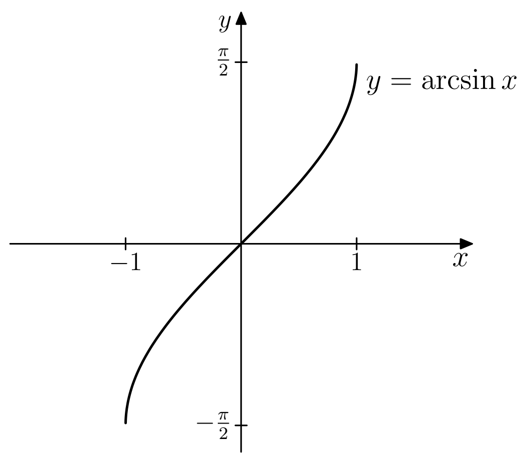
on määratud hulgas $\mathbb{R}$, mõlemal juhul $R = [-1, 1]$,
6) *tangensfunktsioon*

$$y = \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

on määratud hulgas $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, sel juhul $R = \mathbb{R}$,
7) *kootangensfunktsioon*

$$y = \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$$

on määratud hulgas $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, siis $R = \mathbb{R}$,



Joonis 4.5: Arkussiinusfunktsioon $y = \arcsin x$.

8) *arkusfunktsioonid* on trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid. Täpsemalt, *arkussiinusfunktsioon* $y = \arcsin x$ on siinusfunktsiooni ***ahendi***

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \to [-1, 1], \ \ f(x) := \sin x$$

ja *arkuskoosinusfunktsioon* $y = \arccos x$ koosinusfunktsiooni ahendi

$$f : [0, \pi] \to [-1, 1], \ \ f(x) := \cos x$$

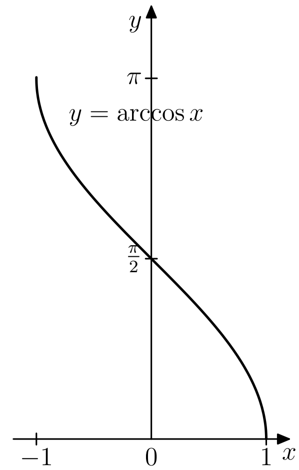
pöördfunktsioon. Analoogiliselt on *arkustangensfunktsioon* $y = \arctan x$ tangensfunktsiooni ahendi

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := \tan x$$

ja *arkuskootangensfunktsioon* $y = \operatorname{arccot} x$ kootangensfunktsiooni ahendi

$$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := \cot x$$

pöördfunktsioon.



Joonis 4.6: Arkuskoosinusfunktsioon $y = \arccos x$.

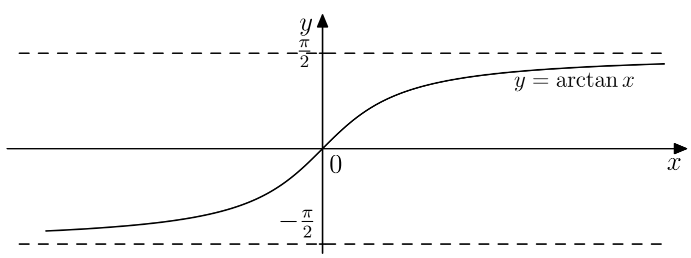
Funktsioone, mis saadakse põhilistest elementaarfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete rakendamisel ja liitfunktsioonide moodustamisel, nimetatakse *elementaarfunktsioonideks.* Märgime, et elementaarfunktsioonide hulka kuuluvad ka kõik *polünoomid*

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kus $a_0, \ldots, a_n$ on fikseeritud reaalarvud ja $n \in \mathbb{N}$.

Kursuses *Matemaatiline analüüs III* tõestatakse järgmine teoreem.

Teoreem 4.9 *Iga elementaarfunktsioon on oma määramispiirkonnas pidev.*



Joonis 4.7: Arkustangensfunktsioon $y = \arctan x$.

4.3 Veel tähtsaid piirväärtusi

Alustame järgmise näitega.

Näide 4.8. Veendume, et koosinusfunktsioon

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1], \ f(x) := \cos x$$

on pidev igas punktis $a \in \mathbb{R}$. Selleks kasutame trigonomeetriast tuntud seoseid

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ja

$$0 < |\sin \alpha| < |\alpha| < |\tan \alpha|\,, \text{ kui } 0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2}, \tag{4.3}$$

mille kohaselt

$$\begin{aligned} 0 \le |\cos x - \cos a| &= 2\left|\sin \frac{x+a}{2}\right| \left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \\ &\le 2\left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \ \text{(peame silmas, et } \left|\sin \frac{x+a}{2}\right| \le 1) \\ &\le |x-a| \ \text{(vrd. (4.3)).} \end{aligned}$$

Lause 3.6 kohaselt saame protsessis $x \to a$ ehk $|x-a| \to 0$, et $\lim\limits_{x\to a} |\cos x - \cos a| = 0$, s.t. $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$. Niisiis on koosinusfunktsioon pidev igas punktis a.

Trigonomeetriliste ja arkusfunktsioonidega seotud piirväärtused. Näite 4.8 abil tõestame, et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Lähtume võrratustest (4.3), neist saame, et

$$\left|\frac{\cos x}{\sin x}\right| = \frac{1}{|\tan x|} < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{|\sin x|}$$

ehk

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \text{ kui } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

(selgitada!)✠. Kuna koosinusfunktsioon on pidev kohal $a = 0$, siis $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ ning lause 3.6 kohaselt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Arvestades elementaarfunktsioonide pidevust (vt. teoreem 4.9) ja asjaolu, et pideva funktsiooni pöördfunktsioon on pidev (vt. teoreem 4.8), saame tõestada järgmised trigonomeetriliste ja arkusfunktsioonidega seotud olulised võrdused:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\cos 0} \cdot 1 = 1, \\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x} &= \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1, \\ \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} &= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} = 1, \\ \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} &= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\tan u} = 1. \end{aligned}$$

Logaritmfunktsiooniga seotud tähtis piirväärtus. Näitame, et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Seosega $y = \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ määratud funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$, kus $D := (-1,0) \cup (0,\infty)$, on esitatav funktsioonide

$$u = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{ja} \quad y = \ln u$$

liitfunktsioonina. Kuna $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (s.t. kui $x \to 0$, siis $u \to e$) ja logaritmfunktsioon on pidev kohal e (s.t. $\lim\limits_{u\to e}\ln u = \ln e$), siis

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to e}\ln u = \ln e = 1.$$

Kokkuvõte

Funktsiooni pidevus on matemaatilise analüüsi üks baasmõistetest, tema sisu väljendub implikatsioonis $x \to a \Rightarrow f(x) \to f(a)$. Täpsemalt, funktsioon f on definitsiooni kohaselt oma määramispiirkonna punktis a pidev, kui eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ning see on võrdne arvuga $f(a)$. Geomeetriliselt tähendab mingis intervallis määratud funktsiooni pidevus seda, et tema graafikuks on pidev joon. Seejuures teisendab pidev funktsioon alati intervalli intervalliks, kusjuures lõigus pideval funktsioonil on selles lõigus nii suurim kui ka vähim väärtus.

Osutub, et artitmeetilised tehted pidevate funktsioonidega annavad tulemuseks pidevad funktsioonid, samuti on pidevate funktsioonide liitfunktsioon alati pidev. Kui intervallis pidev funktsioon on rangelt monotoonne, siis ta on pööratav ja tema pöördfunktsioon on pidev.

Kokkuleppeliselt loeme põhilisteks elementaarfunktsioonideks meile koolimatemaatikast tuntud konstantsed, eksponent-, logaritm-, astme-, trigonomeetrilised ja arkusfunktsioonid. Neist aritmeetiliste tehete ja liitfunktsioonide moodustamise teel saadud funktsioone nimetatakse elementaarfunktsioonideks. Kõik elementaarfunktsioonid on oma määramispiirkonnas pidevad.

5 Funktsioonide diferentseerimine

Funktsiooni diferentseeruvuse mõistel on mitmeid lähtekohti: geomeetriliselt on selleks küsimus funktsiooni graafiku puutuja olemasolust antud punktis, füüsikaliselt küsimus materiaalse punkti liikumise hetkkiirusest, analüütiliselt küsimus vaadeldava funktsiooni lineaarsest lähendamisest. Käesolevas peatükis keskendume diferentsiaalarvutuse tehnilistele probleemidele.

5.1 Funktsiooni tuletis ja diferentseeruvus

Me eeldame kõikjal selles peatükis, et funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ määramispiirkond $D \subset \mathbb{R}$ on (tõkestatud või tõkestamata)lahtine ***intervall.*** Seega, kui $a \in D$, siis a on hulga D kuhjumispunkt.

Definitsioon. Funktsiooni f *tuletiseks* intervalli D punktis a nimetatakse (lõplikku või lõpmatut) piirväärtust

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{5.1}$$

kui see eksisteerib. Kui piirväärtus (5.1) on ***lõplik*** (s.t. $f'(a) \in \mathbb{R}$), siis öeldakse, et funktsioon f on *diferentseeruv punktis*[3] $a \in D$ (ütleme ka *diferentseeruv kohal* a).

Kui f on diferentseeruv igas punktis $x \in X \subset D$, siis öeldakse, et funktsioon f on *hulgas* X *diferentseeruv.* Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimetame diferentseeruvaks, kui ta on diferentseeruv oma määramispiirkonna D igas punktis. Sel juhul on määratud funktsioon $f'\colon D \to \mathbb{R}$.

Tuletisfunktsiooni $f'\colon D \to \mathbb{R}$ puhul kirjutame $f'(x)$ asemel tihti ka $(f(x))'$, näiteks $(\sin x)' = \cos x$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral (vt. näide 5.6 allpool). Mõnikord on tuletise puhul mugavam kasutada ***Leibnizi tähistusviisi***

$$\frac{df}{dx} \ \text{ ehk } \frac{d}{dx} f,$$

niisiis

$$\frac{d \sin x}{dx} = (\sin x)' = \cos x \text{ iga } x \in \mathbb{R} \text{ korral.}$$

Näide 5.1. Konstantse funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := c$$

ja suvalise $a \in \mathbb{R}$ korral

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0.$$

Seega on konstantne funktsioon f igas punktis a diferentseeruv ja tema tuletis võrdub nulliga, s.t. $f'(a) = 0$ iga $a \in \mathbb{R}$ korral.

[3]Rõhutame, et kui $a \in D$ on intervalli D otspunkt, siis piirväärtuse (5.1) puhul on tegemist vastava ühepoolse piirväärtusega.

Näide 5.2. Olgu $m, n \in \mathbb{R}$ ja $m \neq 0$. Leiame lineaarse funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := mx + n \tag{5.2}$$

tuletise punktis $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{mx + n - (ma + n)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{m(x - a)}{x - a} \\ &= m \lim_{x\to a} \frac{x - a}{x - a} = m \lim_{x\to a} 1 = m. \end{aligned}$$

Seega on lineaarne funktsioon (5.2) igas punktis $a \in \mathbb{R}$ diferentseeruv ja $f'(a) = m$.

Erijuhul, kui $f(x) := x$, saame, et $f'(a) = 1$ iga $a \in \mathbb{R}$ korral.

Diferentseeruva funktsiooni pidevus väljendub järgmises lauses.

Lause 5.1 *Kui funktsioon f on punktis a diferentseeruv, siis on ta selles punktis pidev.*

Tõestus. Eeldame, et funktsioon f on kohal a diferentseeruv, seega eksisteerib lõplik piirväärtus (5.1). Seetõttu

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x\to a} (x - a) \quad \text{(põhjendada!✠)} \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

ehk $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (selgitada!)✠, mis tähendabki funktsiooni f pidevust punktis a. ■

Järgmine näide kinnitab, et lause 5.1 ei ole pööratav: leidub pidevaid funktsioone, mis ei ole diferentseeruvad.

Näide 5.3. Vaatleme funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := |x|,$$

mis teatavasti on pidev igas punktis $a \in \mathbb{R}$ (vt. näide 4.1). Osutub, et funktsioonil f ei ole kohal $a = 0$ tuletist. Tõepoolest, ühepoolsed piirväärtused

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1, \\ \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned}$$

on erinevad, seega piirväärtust (5.1) ei eksisteeri.

Seevastu näite 5.2 kohaselt

$$f'(x) = \begin{cases} (-x)', & \text{kui } x < 0, \\ x', & \text{kui } x > 0, \end{cases} = \begin{cases} -1, & \text{kui } x < 0, \\ 1, & \text{kui } x > 0, \end{cases}$$

suvalise $x \neq 0$ korral.

Järgnevalt leiame definitsioonist lähtudes mõnede **tähtsate elementaarfunktsioonide tuletised.**

Näide 5.4. Olgu $n \in \mathbb{N}$, leiame funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) := x^n$$

tuletise kohal $a \in \mathbb{R}$. Selleks tuleb arvutada piirväärtus

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}.$$

Lihtne on veenduda, et

$$x^n - a^n = (x - a)\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-1}\right)$$

(kontrollida!)✠, seega

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-1}\right) \\ &= \lim_{x \to a} x^{n-1} + a \lim_{x \to a} x^{n-2} + a^2 \lim_{x \to a} x^{n-3} + \cdots + a^{n-1} \\ &= a^{n-1} + aa^{n-2} + a^2a^{n-3} + \cdots + a^{n-1} \\ &= na^{n-1}. \end{aligned}$$

Niisiis,

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ iga } x \in \mathbb{R} \text{ korral.}$$

Näide 5.5. Leiame eksponentfunktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) := e^x$$

tuletise punktis $a \in \mathbb{R}$. Selleks kasutame tuntud valemit

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(kontrollida!)✠, mille abil saame, et

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^a e^h - e^a}{h} = e^a \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^a. \tag{5.3}$$

Seega

$$(e^x)' = e^x \text{ iga } x \in \mathbb{R} \text{ puhul.}$$

Näide 5.6. Siinusfunktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) := \sin x$$

tuletise leidmisel kasutame lisaks trigonomeetriast tuntud seosele

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

eelmises peatükis tõestatud valemit

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$

ja asjaolu, et koosinusfunktsioon on pidev, s.t.

$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

(vt. näide 4.8):

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos a.\end{aligned}$$

Niisiis,

$$(\sin x)'=\cos x \text{ iga } x\in\mathbb{R} \text{ korral.}$$

Analoogiliselt veendutakse, et

$$(\cos x)'=-\sin x \text{ iga } x\in\mathbb{R} \text{ korral}$$

(kontrollida!)✠.

5.2 Diferentseeruvuse geomeetriline ja füüsikaline tähendus

Tuletise mõiste geomeetriline sisu. Üldiselt on xy-tasandil esitatud sirge, mis ei ole y-teljega paralleelne, määratud võrrandiga

$$y=mx+n, \tag{5.4}$$

kus m ja n on mingid arvud. Seejuures nimetatakse arvu m sirge (5.4) *tõusuks.* Tähistame tähega α nurga, mille sirge (5.4) moodustab x-telje positiivse suunaga, siis $\tan\alpha=m$.

Kui sirge (5.4) läbib etteantud punkte (a,b) ning (a',b'), siis on võrrand (5.4) kujul

$$y=\frac{b'-b}{a'-a}(x-a)+b, \tag{5.5}$$

seega $m=\frac{b'-b}{a'-a}$ ja $n=b-\frac{b'-b}{a'-a}a$ (veenduda, et sirge (5.5) tõepoolest läbib punkte (a,b) ja (a',b')!)✠.

Olgu funktsioon $f\colon D\to\mathbb{R}$ diferentseeruv lahtise intervalli D punktis a. Joonistame selle funktsiooni graafiku xy-tasandil, fikseerime mingi $z\in D\setminus\{a\}$ ja tõmbame graafikule läbi punktide $P:=(a,f(a))$ ja $Q:=(z,f(z))$ lõikaja, see on sirge võrrandiga

$$y=\frac{f(z)-f(a)}{z-a}(x-a)+f(a) \tag{5.6}$$

(kontrollida!)✠. Tähistame tähega β selle nurga, mille sirge (5.6) moodustab x-telje positiivse suunaga. Paneme tähele, et

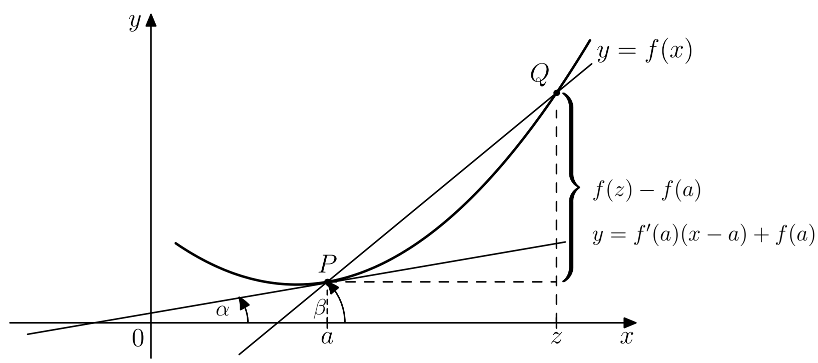
$$\tan\beta=\frac{f(z)-f(a)}{z-a}.$$

Selge, et nurk β sõltub valitud arvust z. Kui $z \to a$, siis punkt Q läheneb punktile P mööda joont $y = f(x)$ (s.o. mööda funktsiooni f graafikut). Samas protsessis $z \to a$ sirge (5.6) tõus $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ läheneb arvule $f'(a)$ ja võrrand (5.6) saab kuju

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \tag{5.7}$$

(vt. joonis 5.1). Selle võrrandiga määratud sirge läbib punkti $(a, f(a))$.

Definitsioon. Kohal $a \in D$ diferentseeruva funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ *graafiku puutujaks* punktis $(a, f(a))$ nimetatakse sirget, mis on määratud võrrandiga (5.7).



Joonis 5.1: Diferentseeruva funktsiooni graafiku puutuja.

Niisiis, punktis a diferentseeruva funktsiooni f korral
• punktis $(a, f(a))$ on funktsiooni graafiku puutujaks punkte $(a, f(a))$ ja $(x, f(x))$ läbiva lõikaja piirseis protsessis $x \to a$,
• tuletis $f'(a)$ on võrdne puutuja tõusuga, s.t. tõusunurga tangensiga.

Funktsiooni diferentsiaal. Olgu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ diferentseeruv punktis $a \in D$, siis

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0,$$

kus

$$\alpha(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

Kui tähistada $\Delta_a f := f(x) - f(a)$ ja $\mathrm{d}x := x - a$, saame seose

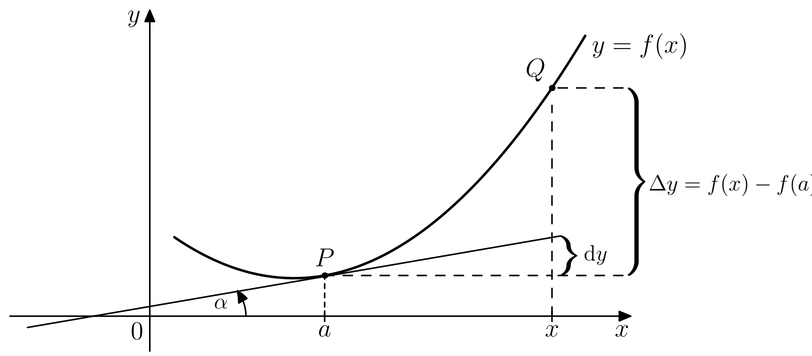
$$\Delta_a f = f'(a)\,\mathrm{d}x + \alpha(x)\,\mathrm{d}x,$$

see on funktsiooni väärtuse muut, mis vastab argumendi muudule $\mathrm{d}x$. Parempoolse avaldise esimest liidetavat

$$\mathrm{d}y := f'(a)\,\mathrm{d}x$$

nimetatakse funktsiooni f *diferentsiaaliks* kohal a, mõnikord tähistatakse seda ka sümboliga $\mathrm{d}f$ või $\mathrm{d}_a f$.

Diferentsiaali geomeetriline sisu on lihtne: ta on punktis $(a, f(a))$ funktsiooni f graafikule võetud puutuja ordinaadi (s.t. y-koordinaadi) muut, mis vastab abstsissi (s.t. x-koordinaadi) muudule $\mathrm{d}x$ kohal a (vt. joonis 5.2).



Joonis 5.2: Diferentseeruva funktsiooni diferentsiaal.

Tuletise mõiste füüsikaline sisu. Liikugu materiaalne punkt M mööda arvsirget, olgu $s(t)$ tema koordinaat ajamomendil t. Olgu t_0 mingi fikseeritud ajamoment, selle ja momendi t vahel läbib punkt vahemaa $s(t) - s(t_0)$. Punkti *keskmine kiirus* sellel teelõigul on

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Kui piirväärtus

$$v(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

eksisteerib, siis seda nimetatakse punkti *kiiruseks ajamomendil* t_0. Niisiis, $v(t_0) = s'(t_0)$.

5.3 Tehetega seotud diferentseerimisreeglid

Lause 5.2 *Kui funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ on punktis $a \in D$ diferentseeruvad, siis ka funktsioonid $f + g$ ja $f - g$ on selles punktis diferentseeruvad ning*

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a).$$

Tõestus. Eeldame, et mõlemad funktsioonid f ja g on punktis a diferentseeruvad, s.t. eksisteerivad lõplikud piirväärtused

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ ja } g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Suvalise arvust a erineva argumendi väärtuse x korral moodustame avaldise

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} &= \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} \\ &= \frac{(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a},\end{aligned}$$

piirprotsessis $x \to a$ saame, et

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \text{ (põhjendada!)✠}\\ &= f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

Vahe $f-g$ puhul on tõestus analoogiline. ■

Lause 5.3 *Kui funktsioon $f\colon D\to\mathbb{R}$ on punktis $a\in D$ diferentseeruv, siis ka funktsioon λf on iga $\lambda\in\mathbb{R}$ korral selles punktis diferentseeruv ning*

$$(\lambda f)'(a)=\lambda f'(a).$$

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Lause 5.4 *Kui funktsioonid $f\colon D\to\mathbb{R}$ ja $g\colon D\to\mathbb{R}$ on punktis $a\in D$ diferentseeruvad, siis ka nende korrutis fg on selles punktis diferentseeruv funktsioon ning*

$$(fg)'(a)=f(a)g'(a)+f'(a)g(a).$$

Tõestus. Eeldame, et eksisteerivad lõplikud piirväärtused

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ ja } g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Suvalise $x\in D\diagdown\{a\}$ korral saame vahe $fg(x)-fg(a)$ esitada kujul

$$f(x)g(x)-f(a)g(a)=(f(x)-f(a))g(x)+f(a)(g(x)-g(a)),$$

siis

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Kuna kohal a diferentseeruv funktsioon g on lause 5.1 põhjal selles punktis pidev, s.t. $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$, siis piirväärtuse tehetega seotud omaduste kohaselt (vt. lause 3.7)

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}g(x)+f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= f'(a)g(a)+f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Lause on tõestatud. ■

Lause 5.5 *Kui funktsioonid $f\colon D\to\mathbb{R}$ ja $g\colon D\to\mathbb{R}$ on punktis a diferentseeruvad ning $g(a)\neq 0$, siis ka funktsioon*

$$\frac{f}{g}\colon D'\to\mathbb{R},\ \ \frac{f}{g}(x):=\frac{f(x)}{g(x)},$$

kus $D':=\{x\in D\mid g(x)\neq 0\}$, on selles punktis diferentseeruv ja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Tõestus. Vaatleme algul juhtu, kus f on konstantne funktsioon väärtusega 1. Siis

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g}(x)-\frac{1}{g}(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)\,g(a)}\frac{g(a)-g(x)}{x-a} = \frac{1}{g(a)^2}\left(-g'(a)\right).\end{aligned}$$

Sellest valemist saame lauset 5.4 rakendades, et

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(a) = f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) + f'(a)\frac{1}{g}(a)\\ &= f(a)\frac{-g'(a)}{g(a)^2} + f'(a)\frac{1}{g(a)}\\ &= \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}.\end{aligned}$$

Sellega on lause tõestatud. ■

Näide 5.7. Polünoom $P(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ on igas punktis $x \in \mathbb{R}$ diferentseeruv ning

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

(veenduda!)✠.

Näide 5.8. Tangensfunktsioon

$$f\colon D \to \mathbb{R},\ \ f(x) := \tan x,$$

kus $D := \mathbb{R}\diagdown\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, on igas punktis $x \in D$ diferentseeruv (paneme tähele, et iga punkti $x \in D$ võib vaadelda mingi vahemiku $\left(\frac{\pi}{2} + (k_0 - 1)\,\pi, \frac{\pi}{2} + k_0\pi\right)$ punktina, kus $k_0 \in \mathbb{Z}$). Nimelt, lause 5.5 kohaselt

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Analoogiliselt saadakse, et

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

iga $x \in \mathbb{R}\diagdown\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ korral (veenduda!)✠.

5.4 Liitfunktsiooni ja pöördfunktsiooni diferentseerimine

Liitfunktsiooni diferentseerimise reegel, mida nimetatakse ka **ahelareegliks,** on järgnevas lauses esitatud kahest komponendist koosneva liitfunktsiooni puhul, kuid analoogiline reegel kehtib ka suurema arvu komponentide korral.

Lause 5.6 *Olgu funktsioon* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *kohal* $a \in D$ *diferentseeruv. Kui* $f(x) \in E$ *iga* $x \in D$ *korral ja funktsioon* $h\colon E \to \mathbb{R}$ *on punktis* $b := f(a)$ *diferentseeruv, siis ka liitfunktsioon*

$$h \circ f\colon D \to \mathbb{R}, \quad h \circ f(x) := h(f(x))$$

on punktis a *diferentseeruv ja*

$$(h \circ f)'(a) = h'(b)\, f'(a).$$

Tõestus. Eeldame, et funktsioon $u = f(x)$ on kohal a ja funktsioon $y = h(u)$ kohal $b = f(a)$ diferentseeruv. Meie eesmärgiks on veenduda, et

$$\lim_{x\to a} \frac{h \circ f(x) - h \circ f(a)}{x - a} = h'(f(a))\, f'(a).$$

Defineerime abifunktsiooni

$$\varphi : E \to \mathbb{R}, \quad \varphi(u) := \begin{cases} \frac{h(u)-h(b)}{u-b}, & \text{kui } u \neq b, \\ h'(b), & \text{kui } u = b. \end{cases}$$

Kuna funktsioon h on punktis b diferentseeruv, siis φ on kohal b pidev:

$$\lim_{u\to b} \varphi(u) = \lim_{u\to b} \frac{h(u) - h(b)}{u - b} = h'(b) = \varphi(b). \tag{5.8}$$

Paneme tähele, et

$$h(u) - h(b) = \varphi(u)(u - b) \ \text{ iga } u \in E \text{ puhul,}$$

niisiis

$$h(f(x)) - h(f(a)) = \varphi(f(x))(f(x) - f(a)) \ \text{ iga } x \in D \text{ korral.} \tag{5.9}$$

Kuna funktsioon f on kohal a diferentseeruv, siis lause 5.1 kohaselt on ta selles punktis pidev. Et funktsioon φ on pidev kohal $b = f(a)$ (vt. (5.8)), siis liitfunktsioon $\varphi \circ f$ on lause 4.3 põhjal pidev punktis a, seega

$$\lim_{x\to a} \varphi(f(x)) = \varphi(f(a)). \tag{5.10}$$

Seostest (5.9) ja (5.10) saame, et

$$\begin{aligned}(h \circ f)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{h \circ f(x) - h \circ f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{h(f(x)) - h(f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \varphi(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \varphi(f(x)) \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \varphi(f(a))\, f'(a) = h'(f(a))\, f'(a).\end{aligned}$$

Lause on tõestatud. ■

Näide 5.9. Liitfunktsiooni diferentseerimise reegli abil leiame astmefunktsiooni

$$f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^{\alpha} := e^{\alpha \ln x},$$

kus α on suvaline nullist erinev reaalarv, tuletise :

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Pöördfunktsiooni diferentseerimise reegli esitame tõestuseta**.** Meenutame, et (vt. lause 4.7) kui $f\colon D \to \mathbb{R}$ on hulgas D rangelt monotoonne funktsioon, siis tal on rangelt monotoonne pöördfunktsioon $f^{-1}\colon f(D) \to D$. Kui seejuures D on intervall ja f on pidev, siis $D' := f(D)$ on samuti intervall (vrd. teoreem 4.4).

Lause 5.7 *Olgu pidev rangelt monotoonne funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ punktis a diferentseeruv. Pöördfunktsioon $f^{-1} : D' \to \mathbb{R}$ on kohal $b := f(a)$ diferentseeruv parajasti siis, kui $f'(a) \neq 0$. Sel juhul*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{5.11}$$

Näide 5.10. Leiame valemi (5.11) abil logaritmfunktsiooni

$$f\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R},\ \ y = f(x) := \ln x$$

tuletise. Kuna f on eksponentfunktsiooni

$$g\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)\,,\ \ g(y) := e^y$$

pöördfunktsioon ja $g'(y) = e^y \neq 0$ iga $y \in \mathbb{R}$ korral, siis kõikide $x \in (0,\infty)$ puhul

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Niisiis,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ iga } x \in (0,\infty) \text{ korral.}$$

Näide 5.11. Arkussiinusfunktsioon

$$f\colon\ [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \ f(x) := \arcsin x$$

on pideva lõigus $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ rangelt kasvava siinusfunktsiooni

$$g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ \ g(y) := \sin y$$

pöördfunktsioon, valemi (5.11) kohaselt

$$f'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ kui } x \in (-1,1)\,.$$

Seega

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ iga } x \in (-1,1) \text{ puhul.}$$

Analoogiliselt tuletatakse valemid

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ kui } x \in (-1,1)$$

ning

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{ja} \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \text{ kui } x \in \mathbb{R}.$$

5.5 Kõrgemat järku tuletised

Eeldame, et funktsioon f on diferentseeruv lahtises intervallis D, s.t. lõplik tuletis $f'(x)$ eksisteerib iga $x \in D$ korral. Kui funktsioonil $f'\colon D \to \mathbb{R}$ on punktis $a \in D$ tuletis

$$f''(a) := f^{(2)}(a) := \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}, \tag{5.12}$$

siis seda nimetatakse funktsiooni f *teiseks* ehk *teist järku tuletiseks* kohal a. Kui piirväärtus (5.12) on lõplik, siis öeldakse, et funktsioon f on kohal a *kaks korda diferentseeruv*.

Kui f on intervallis D kaks korda diferentseeruv, siis saame funktsiooni $f''\colon D \to \mathbb{R}$, seda märgitakse ka $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Kui funktsioonil f'' on punktis $a \in D$ tuletis, siis kõneldakse funktsiooni f *kolmandast* ehk *kolmandat järku tuletisest* kohal a, jne.

Üldiselt, kui funktsiooni f $(n-1)$-järku tuletisel $f^{(n-1)}$ on punktis $a \in D$ omakorda tuletis, siis seda nimetatakse funktsiooni n*-daks* ehk n*-dat järku tuletiseks* kohal a ja tähistatakse $f^{(n)}(a)$. Juhul, kui $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$, öeldakse, et f on kohal a n *korda diferentseeruv*. Kui f on intervallis D n korda diferentseeruv, siis saame funktsiooni $f^{(n)}\colon D \to \mathbb{R}$, mida tähistatakse ka $\frac{d^n f}{dx^n}$ (veel kasutatakse tähistusi $\frac{d^n y}{dx^n}$ ja $\frac{d^n}{dx^n} f$).

Näide 5.12. Leiame siinusfunktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := \sin x$$

n-dat järku tuletise suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral.

Teatavasti

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x \ \text{ ja } \ f''(x) = (\cos x)' = -\sin x$$

suvalise $x \in \mathbb{R}$ korral. Seega

$$f'''(x) = (-\sin x)' = -\cos x$$

ning

$$f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = \sin x.$$

Edasi,
$f^{(5)}(x) = f'(x) = \cos x$,
$f^{(6)}(x) = f''(x) = -\sin x$,
$f^{(7)}(x) = f'''(x) = -\cos x$,
$f^{(8)}(x) = f^{(4)}(x) = \sin x$, jne.
Üldiselt

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x, & \text{kui } n = 4k+1, \\ -\sin x, & \text{kui } n = 4k+2, \\ -\cos x, & \text{kui } n = 4k+3, \\ \sin x, & \text{kui } n = 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Näide 5.13. Leiame logaritmfunktsiooni

$$f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := \ln x$$

n-dat järku tuletise suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral.

Kuna

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

siis
$f''(x) = (x^{-1})' = -x^{-2}$,
$f'''(x) = (-x^{-2})' = 2x^{-3}$,
$f^{(4)}(x) = (2x^{-3})' = -3 \cdot 2x^{-4} = -3!x^{-4}$,
$f^{(5)}(x) = (-3!x^{-4})' = 4!x^{-5}$, jne.
Niisiis,

$$(\ln x)^{(n)} = \begin{cases} \frac{(n-1)!}{x^n}, & \text{kui } n = 2k-1, \\ \frac{-(n-1)!}{x^n}, & \text{kui } n = 2k, \end{cases} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

(peame silmas, et $0! := 1$).

Kokkuvõte

Antud funktsiooni uurimisel huvitab meid, milline on funktsiooni väärtuste muutumine argumendi vaadeldava muutumise korral. Pideva funktsiooni f puhul väljendub see implikatsioonis $x \to a \Rightarrow f(x) \to f(a)$, geomeetriliselt tähendab funktsiooni pidevus tema graafiku (kui joone) pidevust. Funktsiooni f diferentseeruvus punktis a tähendab lõpliku piirväärtuse $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =: f'(a)$ olemasolu, sel juhul on funktsiooni f graafikul punktis $(a, f(a))$ puutuja, $f'(a)$ on selle puutuja tõus. Kõik diferentseeruvad funktsioonid on pidevad.

Funktsioonid, mis saadakse diferentseeruvatest funktsioonidest aritmeetiliste tehete ja liitfunktsioonide moodustamise teel, on samuti diferentseeruvad. Sealjuures on diferentseerimine, s.t. tuletise leidmise operatsioon, lineaarne: funktsioonide summa $f + g$ tuletis on tuletiste summa $f' + g'$ ning kordse λf tuletis on tuletise kordne $\lambda f'$. Seevastu funktsioonide korrutise ning jagatise tuletis on keerulisemad avaldised. Ahelareegel – liitfunktsiooni diferentseerimise valem – annab võimaluse leida selliste funktsioonide tuletist, mida saab esitada diferentseeruvate funktsioonide liitfunktsioonina.

6 Keskväärtusteoreemid. L'Hospitali reegel. Taylori valem

Allpool tõestatavad keskväärtusteoreemid 6.3 ja 6.4 moodustavad olulise vahelüli diferentsiaalarvutuse ja tema rakenduste vahel. L'Hospitali reegel on suurepärane abivahend keeruliste piirväärtuste leidmisel. Taylori valem on lähtekohaks funktsioonide lähendusteooria ülesehitamisel.

6.1 Diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreemid

Tuletise seos funktsiooni ekstreemumitega. Definitsioon. Olgu funktsioon f määratud intervallis D ja olgu a intervalli D sisepunkt, s.t. $a \in D^o$.
(a) Kui punktil a on selline ümbrus $U_\delta(a)$, et

$$f(x) \leq f(a) \text{ iga } x \in U_\delta(a) \text{ korral,}$$

siis öeldakse, et funktsioonil f on punktis a *lokaalne maksimum.*
(b) Kui punktil a on selline ümbrus $U_\delta(a)$, et

$$f(x) \geq f(a) \text{ iga } x \in U_\delta(a) \text{ korral,}$$

siis öeldakse, et funktsioonil f on punktis a *lokaalne miinimum.*
(c) Kui funktsioonil on vaadeldavas punktis kas lokaalne maksimum või lokaalne miinimum, siis öeldakse, et tal on *lokaalne ekstreemum.*
(d) Kui võrratus $f(x) \leq f(a)$ või $f(x) \geq f(a)$ kehtib iga $x \in D$ korral, siis öeldakse, et funktsioonil f on kohal a vastavalt *globaalne maksimum* või *globaalne miinimum* hulgas D.

Lause 6.1 ***(Fermat' teoreem)****. Olgu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ intervalli D sisepunktis a diferentseeruv ning olgu tal selles punktis lokaalne ekstreemum. Siis $f'(a) = 0$.*

Tõestus. Eeldame, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on kohal $a \in D^o$ diferentseeruv ja tal on selles punktis lokaalne ekstreemum, olgu see konkreetsuse mõttes lokaalne maksimum. Valime vastavalt eelnevale definitsioonile sellise $\delta > 0$, et $U_\delta(a) \subset D$ ning iga $x \in U_\delta(a)$ korral $f(x) \leq f(a)$, seega

$$f(x) - f(a) \leq 0, \text{ kui } a - \delta < x < a + \delta. \tag{6.1}$$

Eelduse kohaselt eksisteerib lõplik piirväärtus

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{6.2}$$

seega leiduvad mõlemad ühepoolsed piirväärtused, mis on võrdsed piirväärtusega (6.2), niisiis

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Paneme tähele, et kui $a - \delta < x < a$, siis $x - a < 0$ ja seose (6.1) tõttu $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Sellest võrratusest saame protsessis $x \to a-$ järelduse 3.8 põhjal, et

$$f'(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

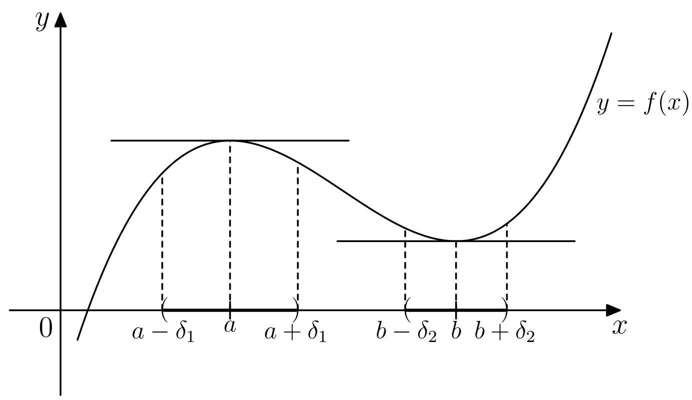
Kui aga $a < x < a + \delta$, siis $x - a > 0$ ning $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$, järelikult

$$f'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Kuna võrratused $f'(a) \geq 0$ ja $f'(a) \leq 0$ on üheaegselt täidetud, siis $f'(a) = 0$.

Sama tulemuseni jõuame ka siis, kui funktsioonil f on punktis a lokaalne miinimum. ■

Geomeetriliselt tähendab lause 6.1 väide seda, et kui kohal a diferentseeruval funktsioonil on selles punktis lokaalne ekstreemum, siis tema graafikule punktis $(a, f(a))$ võetud puutuja on paralleelne x-teljega (vt. joonis 6.1).



Joonis 6.1: Funktsiooni lokaalsed ekstreemumid statsionaarsetes punktides.

Definitsioon. Punkti $a \in D$ nimetatakse diferentseeruva funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ *statsionaarseks punktiks,* kui $f'(a) = 0$.

Fermat' teoreemi kohaselt saab diferentseeruval funktsioonil olla lokaalne ekstreemum vaid tema statsionaarses punktis (põhjendada!)✠.

Näide 6.1. Vaatleme ruutpolünoomi

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := x^2 - 2x + 5.$$

Funktsioon f on hulgas $\mathbb{R}$ diferentseeruv, seejuures $f'(x) = 2x - 2$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Seega $f'(a) = 0$ parajasti siis, kui $a = 1$, niisiis on 1 funktsiooni f ainuke statsionaarne punkt. Kuna $f(x) = (x-1)^2 + 4$, siis funktsioonil f on kohal $a = 1$ globaalne (seega ka lokaalne) miinimum, minimaalseks väärtuseks on 4. Fermat' teoreemi kohaselt on see ainuke lokaalne ekstreemum (selgitada!)✠.

Nagu kinnitab järgmine näide, ei pruugi igas statsionaarses punktis funktsioonil ekstreemumit olla. Teisisõnu, tingimus $f'(a) = 0$ on vaid tarvilik, üldjuhul mittepiisav selleks, et diferentseeruval funktsioonil f oleks kohal a lokaalne ekstreemum.

Näide 6.2. Kuupfunktsioon

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := x^3$$

on igas punktis $x \in \mathbb{R}$ diferentseeruv ning $f'(x) = 3x^2$. Seega on 0 funktsiooni ainuke statsionaarne punkt, kuid $f(0) = 0$ ei ole funktsiooni f lokaalne ekstreemum. Nimelt on tal punkti 0 igas ümbruses $U_\delta(0) = (-\delta, \delta)$, kus δ on suvaline positiivne arv, nii negatiivseid kui ka positiivseid väärtusi:

$$f(x) = x^3 < 0, \text{ kui } x < 0 \quad \text{ja} \quad f(x) = x^3 > 0, \text{ kui } 0 < x.$$

Niisiis ei ole kuupfunktsioonil ühtegi lokaalset ekstreemumit.

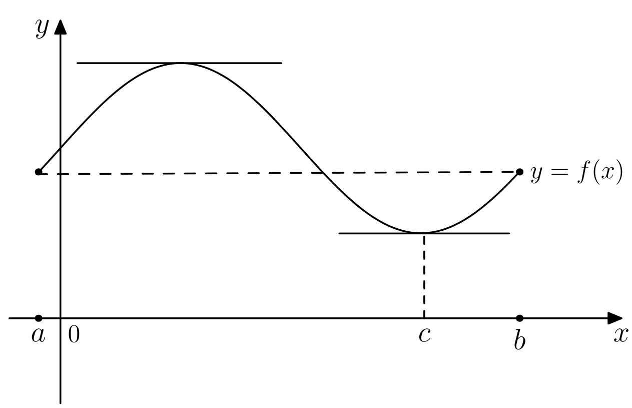
Keskväärtusteoreemid. Fermat' teoreemi abil on lihtne tõestada järgmist ***Rolle'i teoreemi.***

Lause 6.2 *Olgu* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *pidev funktsioon, mis vahemikus* (a,b) *on diferentseeruv. Kui* $f(a) = f(b)$*, siis leidub selline* $c \in (a,b)$*, et* $f'(c) = 0$.

Tõestus. Eeldame, et f on lõigus $[a,b]$ pidev ning vahemikus (a,b) diferentseeruv funktsioon omadusega $f(a) = f(b)$. Selge, et väide kehtib, kui f on seejuures konstantne funktsioon, siis $f'(x) = 0$ iga $x \in (a,b)$ puhul.

Olgu f mittekonstantne funktsioon. Kuna ta on lõigus $[a,b]$ pidev, siis Weierstrassi teoreemi 4.6 põhjal on tal selles lõigus nii minimaalne kui ka maksimaalne väärtus. Seejuures vähemalt ühe neist globaalsetest ekstreemumitest, mis sel juhul on ka lokaalne ekstreemum, saavutab funktsioon vahemikus (a,b) (selgitada!)✠, olgu see punktis $c \in (a,b)$. Lause 6.1 kohaselt $f'(c) = 0$. ■

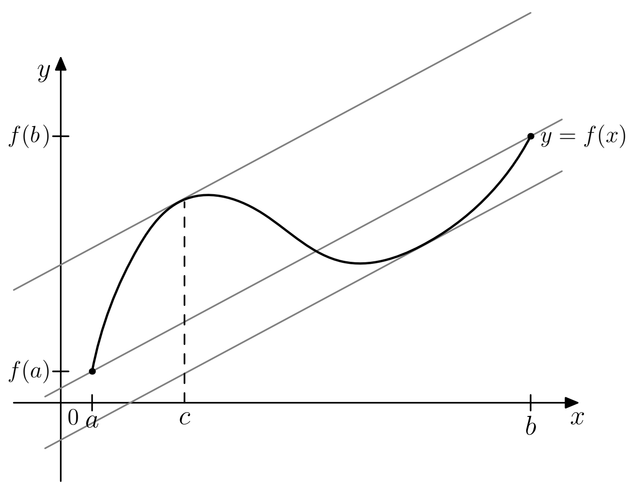
Geomeetriliselt tähendab Rolle'i teoreemi väide seda, et kui lõigus $[a,b]$ pideva ja vahemikus (a,b) diferentseeruva funktsiooni f graafiku otspunkte $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ läbiv lõikaja on x-teljega paralleelne, siis on nende vahel vähemalt üks selline graafiku punkt $(c, f(c))$, milles võetud puutuja on selle lõikajaga paralleelne (vt. joonis 6.2). Järgmine lause – Lagrange'i keskväärtusteoreem – ütleb, et sellises geomeetrilises sõnastuses kehtib Rolle'i teoreem ka ilma eelduseta $f(a) = f(b)$: lõigus $[a,b]$ pideva ja vahemikus (a,b) diferentseeruva funktsiooni f korral on vähemalt ühes graafiku punktis $(c, f(c))$ puutuja paralleelne läbi graafiku punktide $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ tõmmatud lõikajaga (vt. joonis 6.3).



Joonis 6.2: Rolle'i teoreem.

Lause 6.3 ***(Lagrange'i keskväärtusteoreem).*** *Olgu $f\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ pidev funktsioon, mis vahemikus (a,b) on diferentseeruv. Siis leidub selline $c\in(a,b)$, et*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Joonis 6.3: Lagrange'i teoreem.

Lagrange'i teoreem on erijuht järgmisest üldisemast keskväärtusteoreemist.

Lause 6.4 ***(Cauchy keskväärtusteoreem).*** *Olgu $f\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ ja $g\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ pidevad funktsioonid, mis vahemikus (a,b) on diferentseeruvad, ning olgu $g'(x)\neq 0$ iga $x\in(a,b)$ korral. Siis leidub selline punkt $c\in(a,b)$, et*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{6.3}$$

Tõestus. Kõigepealt paneme tähele, et $g(b)\neq g(a)$, sest vastasel juhul rahuldaks g Rolle'i teoreemi tingimusi (kontrollida!)✠ ning $g'(x)=0$ vähemalt ühes punktis $x\in(a,b)$, mis on vastuolus lause eeldustega.

Moodustame abifunktsiooni $h\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$, kus

$$h(x):=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right),$$

siis funktsioonide f ja g pidevusest tuleneb funktsiooni h pidevus. Tõepoolest, lause 4.2 põhjal on funktsioon $y=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right)$ pidev, seega on h pidev kui kahe pideva funktsiooni vahe. Lisaks sellele on ta vahemikus (a,b) diferentseeruv:

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)\quad (x\in(a,b)) \tag{6.4}$$

(kontrollida!)✠. Kuna $h(b)=h(a)=f(a)$ (veenduda!)✠, siis rahuldab h kõiki Rolle'i teoreemi tingimusi, seega $h'(c)=0$ mingis punktis $c\in(a,b)$. Võrdusest (6.4) saamegi seose (6.3) (kontrollida!)✠. ■

Kui lauses 6.4 võtta $g(x) := x$, siis saame Lagrange'i teoreemi.

Näide 6.3. Rakendame näites 6.1 vaadeldud ruutpolünoomile

$$f\colon\ [-1,2] \to \mathbb{R},\ \ f(x) := x^2 - 2x + 5$$

Lagrange'i keskväärtusteoreemi lõigus $[-1,2]$ ning leiame tema graafikul punkti $(c, f(c))$, milles võetud puutuja on paralleelne läbi punktide $(-1, f(-1)) = (-1, 8)$ ja $(2, f(2)) = (2, 5)$ tõmmatud lõikajaga.

Kuna

$$f'(x) = 2(x-1) \quad \text{ja} \quad \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5-8}{3} = -1,$$

siis tuleb lahendada võrrand

$$2(x-1) = -1,$$

kust saame, et $x = \frac{1}{2}$. Seega on otsitavaks punktiks $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{17}{4}\right)$.

6.2 L'Hospitali reegel

Cauchy keskväärtusteoreemi abil tõestakse l'Hospitali reegel funktsioonide **piirväärtuse** $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ **arvutamiseks** määramatuste $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$ puhul, s.t. juhul, kui $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ või vastavalt $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$. Järgmise teoreemi tõestus esitatakse kursuses *Matemaatiline analüüs III.*

Teoreem 6.5 ***(l'Hospitali reegel).*** *Eeldame, et funktsioonid f ja g on diferentseeruvad hulgas $(a-\theta, a+\theta) \setminus \{a\}$, kus θ on mingi positiivne arv. Kui kas*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

või

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$$

ning eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L,$$

siis

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Analoogiline väide kehtib ka piirprotsesside $x \to a-$, $x \to a+$, $x \to -\infty$ ja $x \to \infty$ korral.

Et demonstreerida keskväärtusteoreemi rakendamise põhimõtet teoreemi 6.5 tõestamisel, vaatleme järgmises lauses lihtsat erijuhtu määramatuse $\frac{0}{0}$ korral.

Lause 6.6 *Olgu funktsioonid f ja g lõigus $[a,b]$ pidevad ning vahemikus (a,b) diferentseeruvad, olgu $g'(x) \neq 0$ iga $x \in (a,b)$ puhul. Kui $f(a) = g(a) = 0$ ning eksisteerib piirväärtus*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L,$$

siis

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Tõestus. Olgu $x \in (a,b]$ suvaliselt fikseeritud, siis funktsioonid f ja g rahuldavad lõigus $[a,x]$ Cauchy keskväärtusteoreemi tingimusi (veenduda!)✠. Selle teoreemi rakendamisel leiame niisuguse $c(x) \in (a,x)$, et

$$\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{6.5}$$

Kuna $a < c(x) < x$, siis protsessis $x \to a+$ ka $c(x) \to a+$, järelikult

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{c(x) \to a+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = L$$

tänu eeldusele $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Seostest (6.5) saame, et

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = L.$$

Lause on tõestatud. ■

Näide 6.4. Arvutame piirväärtuse

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

l'Hospitali reegli abil, rakendades seda kaks korda. Tegemist on määramatusega $\frac{0}{0}$, seejuures on teoreemi 6.5 eeldused täidetud (kontrollida!)✠, seega

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Näide 6.5. Arvutame l'Hospitali reegli abil piirväärtuse

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

Võttes piirväärtuse märgi all oleva avaldise ühisele nimetajale, saame, et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - x+1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x - x+1)'}{((x-1)\ln x)'}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Näide 6.6. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x},\ \text{kus } n \text{ on mingi naturaalarv.}$$

Tegemist on määramatusega $\frac{\infty}{\infty}$, piirväärtuse arvutamiseks rakendame l'Hospitali reeglit n korda:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x} = 0.$$

Saadud tulemus kinnitab järgmist põhimõtteliselt olulist fakti: *protsessis $x\to\infty$ kasvab eksponent kiiremini kui mistahes aste.*

Lõpuks rõhutame, et l'Hospitali reeglit saab rakendada vaid määramatuste $\frac{0}{0}$ ning $\frac{\infty}{\infty}$ puhul. Nagu kinnitab järgmine näide, võib see reegel muudel juhtudel anda vale tulemuse.

Näide 6.7. Kuna funktsioon

$$f:(-\infty,3)\cup(3,\infty)\to\mathbb{R},\ \ f(x):=\frac{3x+1}{x-3}$$

on kohal $a=1$ pidev (põhjendada!)✠, siis

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+1}{x-3} = f(1) = -2.$$

Selle piirväärtuse leidmiseks l'Hospitali reeglit kasutada ei saa, sest kohal 1 on funktsioon määratud. Kui seda formaalselt teha, saaksime tulemuseks 3, mis muidugi ei ole õige.

6.3 Taylori valem

Olgu a lahtise intervalli D punkt ning olgu funktsioon $f\colon D\to\mathbb{R}$ kohal a diferentseeruv. Tuletise definitsiooni põhjal

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right) = 0$$

ehk, kui tähistada

$$h_1(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\quad \text{iga } x\in D\setminus\{a\}\ \text{puhul},$$

siis
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + h_1(x)(x-a),$$
kusjuures $\lim\limits_{x\to a} h_1(x) = 0$ iga $x \in D$ korral. Olgu
$$T_1(x) := f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{ja} \quad R_2(a,x) := h_1(x)(x-a),$$
siis suvalise $x \in D$ puhul
$$f(x) = T_1(x) + R_2(a,x).$$
Seejuures $T_1(a) = f(a)$ ja $T_1'(a) = f'(a)$ ning
$$\lim_{x\to a} \frac{R_2(a,x)}{x-a} = \lim_{x\to a} h_1(x) = 0.$$

Funktsiooni f väärtuste ligikaudseks arvutamiseks võime arvutada polünoomi T_1 vastavad väärtused, seejuures kirjeldab arv $R_2(a,x)$ viga, mille me teeme, kui asendame funktsiooni f väärtuse kohal $x \in D$ polünoomi T_1 väärtusega. ***Geomeetriliselt*** tähendab selline lähendamine funktsiooni f graafiku asendamist sellele punktis $(a, f(a))$ tõmmatud puutujaga. Seepärast on arusaadav, et üldjuhul ei ole selline lähendamise eriti täpne.

Eeldame, et funktsioon f on kohal a kaks korda diferentseeruv, defineerime
$$T_2(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2,$$
leiame
$$T_2'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) \text{ ja } T_2''(x) = f''(a)$$
ja paneme tähele, et
$$T_2(a) = f(a), \quad T_2'(a) = f'(a) \text{ ja } T_2''(a) = f''(a).$$
See asjaolu annab põhjust arvata, et punkti a teatavas ümbruses on ruutpolünoom T_2 funktsioonile f paremaks lähendiks kui T_1.

Üldjuhul, kui f on n korda diferentseeruv punktis a, moodustame n-astme polünoomi T_n seosega
$$\begin{aligned} T_n(x) &:= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \end{aligned}$$
(siin $f^{(0)} := f$), seda nimetatakse funktsiooni f *n-astme Taylori polünoomiks kohal a*. Tähelepanuväärne on, et
$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ kõikide } k = 0, 1, \ldots, n \text{ korral}$$
(kontrollida!)✠. Teisalt, kui mingi n-astme polünoom $P(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$ rahuldab tingimust $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ iga $k = 0, 1, \ldots, n$ korral, siis $P = T_n$, s.t.
$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$$

(veenduda!)✠. See asjaolu õigustabki Taylori polünoomide T_n valikut funktsiooni f lähendamisel.

Kui tähistada

$$R_{n+1}(a,x) := f(x) - T_n(x),$$

siis saame seose

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_{n+1}(a,x), \tag{6.6}$$

mida nimetatakse funktsiooni f ***Taylori valemiks*** punktis a, avaldist $R_{n+1}(a,x)$ nimetatakse Taylori valemi ***jääkliikmeks.*** Järgmine teoreem, mille tõestus esitatakse kursuses *Matemaatiline analüüs III*, kirjeldab jääkliikme omadusi.

Teoreem 6.7 *Olgu $D \subset \mathbb{R}$ mingi lahtine intervall ja $a \in D$, olgu $n \in \mathbb{N}_0$.*
(a) *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on n korda diferentseeruv, siis*

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(a,x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{6.7}$$

(b) *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on $n+1$ korda diferentseeruv, siis iga $x \in D\diagdown\{a\}$ korral leidub punktide a ja x vahel selline punkt $c \in D$, et*

$$R_{n+1}(a,x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{6.8}$$

Näeme, et n korda diferentseeruva funktsiooni f korral läheneb $R_{n+1}(a,x)$ protsessis $x \to a$ kiiremini nullile kui $(x-a)^n$ (vt. (6.7)). Kui nõuda funktsioonilt f, et ta oleks $n+1$ korda diferentseeruv, saab jääkliikme esitada nn. ***Lagrange'i kujul*** (6.8).

Märgime, et eelpool Cauchy keskväärtusteoreemi erijuhuna saadud Lagrange'i keskväärtusteoreem osutub ka teoreemi 6.7(b) erijuhuks. Nimelt, kui $n = 0$ ja $x = b > a$, siis valemist (6.8) saame, et

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

mingi $c \in (a,b)$ korral (vrd. lause 6.3).

Näide 6.4. Leiame eksponentfunktsiooni

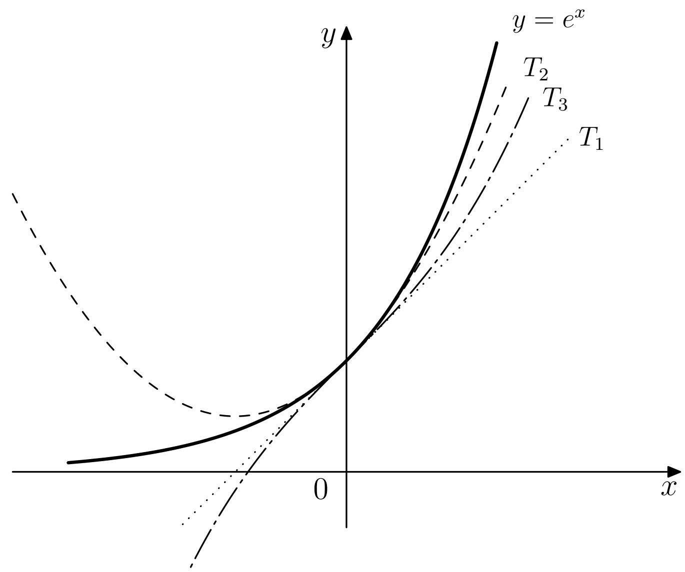
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := e^x$$

esituse Taylori valemi abil punkti $a = 0$ ümbruses. Kuna $(e^x)^{(k)} = e^x$ suvalise $x \in \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{N}$ korral, siis $f^{(k)}(0) = 1$ ning valemi (6.6) põhjal

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_{n+1}(0,x).$$

Jääkliige $R_{n+1}(0,x)$ on valemi (6.8) kohaselt kujul

$$R_{n+1}(0,x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$



Joonis 6.4: Eksponentfunktsioon $y = e^x$ ja tema Taylori polünoomid T_1, T_2 ja T_3.

(kontrollida!)✠, kus c on mingi arv punktide 0 ja x vahel. Jääkliige kirjeldab viga, mille me teeme, kui asendame funktsiooni väärtuse e^x polünoomi $1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$ väärtusega. Selle vea hindamiseks paneme tähele, et kui $b > 0$, siis

$$\left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}e^b \text{ iga } x \in (-b, b) \text{ korral.}$$

Näiteks lõigus $[-1, 1]$ ei ületa absoluutne viga arvu $\frac{e}{(n+1)!}$. On ilmne, et ligikaudse valemi

$$e^x \approx 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

täpsus on seda suurem, mida kõrgem on polünoomi T_n järk n. Samas kahaneb valemi täpsus punkti x kaugenemisel punktist 0.

Joonis 6.4 illustreerib eksponentfunktsiooni Taylori polünoome T_1, T_2 ja T_3.

Näide 6.9. Leiame siinusfunktsiooni

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := \sin x$$

väärtuste ligikaudseks arvutamiseks valemi, mis garanteerib täpsuse $0,001$ lõigus $[-1, 1]$.

Kuna

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x, & \text{kui } n = 4k+1, \\ -\sin x, & \text{kui } n = 4k+2, \\ -\cos x, & \text{kui } n = 4k+3, \\ \sin x, & \text{kui } n = 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

siis $f^{(2k)}(0) = 0$ ja $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, valemi (6.6) kohaselt

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k+3)!}f^{(2k+3)}(c)\, x^{2k+3}.$$

Seejuures

$$|R_n(0,x)| \leq \frac{1}{n!} \text{ iga } x \in [-1,1] \text{ puhul}$$

(kontrollida!)✠, seega garanteerib nõutava täpsuse võrratus $n! \geq 1000$, niisiis $n \geq 7$. Vastav ligikaudne valem on kujul

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7.$$

Kokkuvõte

Me alustasime käesolevat peatükki tähtsa Fermat' teoreemiga, mille kohaselt diferentseeruval funktsioonil f saab lokaalne ekstreemum olla vaid tema statsionaarses punktis, s.o. punktis a, kus $f'(a) = 0$. Diferentsiaalarvutuse ulatuslikumate rakenduste juurde funktsioonide käitumise uurimisel tuleme järgmises peatükis. Käesolevas peatükis valmistasime selleks ette vajalikud abivahendid, neist tähtsaim on Lagrange'i keskväärtusteoreem. Sellel on väga lihtne geomeetriline sisu: kui funktsioon on lõigus $[a,b]$ pidev ning vahemikus (a,b) diferentseeruv, siis tema graafikul on punkt, milles puutuja on paralleelne läbi graafiku otspunktide $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ tõmmatud lõikajaga. Analüütiliselt väljendub see sellise $c \in (a,b)$ olemasolus, et kehtiks võrdus $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Lagrange'i keskväärtusteoreem on erijuht üldisemast Cauchy keskväärtusteoreemist, mille abil tõestatakse tuntud l'Hospitali reegel funktsioonide jagatise piirväärtuse leidmiseks.

Taylori valem on lähtekohaks funktsioonide lähendamisele polünoomidega. Tähelepanuväärne roll seejuures on Taylori valemi jääkliikmel, selle abil hinnatakse niisuguse lähendamise täpsust.

7 Funktsioonide uurimine

Käesolevas peatükis näitame, kuidas diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreemide abil saab leida funktsiooni kasvamise ning kahanemise piirkonnad, lokaalsed ekstreemumid ja tema graafiku kumeruse ning nõgususe piirkonnad. Nii kogutud info abil on võimalik skitseerida funktsiooni graafik.

7.1 Funktsioonide monotoonsus

Keskväärtusteoreem 6.3 on aluseks funktsioonide monotoonsuseomaduste kirjeldamisel. Meenutame (vrd. alapunkt 4.2), et funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimetatakse hulgas D
rangelt kasvavaks, kui suvaliste $x_1, x_2 \in D$ korral

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

kasvavaks, kui suvaliste $x_1, x_2 \in D$ korral

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

rangelt kahanevaks, kui suvaliste $x_1, x_2 \in D$ korral

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

kahanevaks, kui suvaliste $x_1, x_2 \in D$ korral

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Funktsiooni, mis on kas (rangelt) kasvav või (rangelt) kahanev, nimetatakse (rangelt) monotoonseks.

Lause 7.1 *Olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon, mis intervalli D kõigis sisepunktides $x \in D^o$ on diferentseeruv.*
(a) *Kui $f'(x) = 0$ iga $x \in D^o$ korral, siis f on hulgas D konstantne funktsioon.*
(b) *Kui $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geq 0$) iga $x \in D^o$ korral, siis f on hulgas D rangelt kasvav (kasvav) funktsioon.*
(c) *Kui $f'(x) < 0$ ($f'(x) \leq 0$) iga $x \in D^o$ korral, siis f on hulgas D rangelt kahanev (kahanev) funktsioon.*

Tõestus. Olgu y ja z suvalised punktid intervallis D. Eeldame, et $y \neq z$, konkreetsuse mõttes olgu $y < z$. Eelduse kohaselt rahuldab funktsioon lõigus $[y, z]$ Lagrange'i keskväärtusteoreemi (vt. lause 6.3) tingimusi: f on lõigus $[y, z]$ pidev ja vahemikus (y, z) diferentseeruv. Lause 6.3 kohaselt eksisteerib $c \in (y, z)$ omadusega

$$f(z) - f(y) = f'(c)(z - y). \tag{7.1}$$

(a) Eeldame, et $f'(x) = 0$ iga sisepunkti $x \in D^o$ korral. Kuna $c \in (y, z) \subset D^0$ (selgitada!)✠, siis $f'(c) = 0$, mistõttu seosest (7.1) saame, et $f(y) - f(z) = 0$. Seega $f(y) = f(z)$ suvaliste $y, z \in D$ puhul, niisiis on f intervallis D konstantne funktsioon.

(b) Eeldame, et $f'(x) > 0$ iga sisepunkti $x \in D^o$ korral. Siis seose (7.1) põhjal

$$f(z) - f(y) = f'(c)(z - y) > 0$$

ehk $f(y) < f(z)$, seega on f rangelt kasvav. Analoogiliselt saame võrratuse $f(y) \leq f(z)$, kui eeldada, et $f'(x) \geq 0$.

(c) Iseseisvalt!✠ ■

Näide 7.1. Leiame seosega

$$f(x) := x \ln x$$

määratud funktsiooni f kasvamise ja kahanemise piirkonnad. Funktsiooni f määramispiirkonnaks on intervall $D := (0, \infty)$, suvalise $x \in D$ korral eksisteerib lõplik tuletis

$$f'(x) = \ln x + 1.$$

Seega

$$f'(x) > 0 \text{ parajasti siis, kui } x > \frac{1}{e},$$

ning

$$f'(x) < 0 \text{ parajasti siis, kui } x < \frac{1}{e}$$

(selgitada!)✠. Lause 7.1 väidete (b) ja (c) kohaselt on f rangelt kasvav intervallis $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ ning rangelt kahanev intervallis $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$.

Näide 7.2. Leiame kuuppolünoomi

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

kasvamise ja kahanemise piirkonnad. Funktsioon f on igas punktis $x \in \mathbb{R}$ diferentseeruv ning

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3\left(x^2 - 2x - 3\right) = 3(x + 1)(x - 3).$$

Seega

$$f'(x) > 0 \text{ parajasti siis, kui } x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty),$$

ning

$$f'(x) < 0 \text{ parajasti siis, kui } x \in (-1, 3).$$

Niisiis on f rangelt kasvav intervallides $(-\infty, -1]$ ning $[3, \infty)$ ja rangelt kahanev lõigus $[-1, 3]$.

7.2 Funktsiooni lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid

Meenutame, et funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ lokaalseks miinimumiks (vastavalt maksimumiks) nimetatakse tema väärtust intervalli sisepunktis c, kui punktil c leidub niisugune ümbrus $U_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta)$, et $f(x) \geq f(c)$ $(f(x) \leq f(c))$ iga $x \in U_\delta(c)$ korral. Sõna "lokaalne" on siinjuures täiesti omal kohal: tegemist on n.ö. kohaliku tähtsusega ekstreemumiga, mis üldjuhul erineb globaalsest miinimumist $\min\{f(x) \mid x \in D\}$ või vastavalt globaalsest maksimumist $\max\{f(x) \mid x \in D\}$, kui need üldse eksisteerivad.

Kui f on kohal c diferentseeruv ning tal on punktis c lokaalne ekstreemum, siis Fermat' teoreemi kohaselt $f'(c) = 0$. Seejuures, nagu selgub järgmisest näitest, võib funktsioonil olla kohal c ekstreemum ka siis, kui ta selles punktis ei ole diferentseeruv.

Näide 7.3. Teatavasti ei ole funktsioon

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) := |x|$$

punktis 0 diferentseeruv (vt. näide 5.3). Samas on suvalise $\delta > 0$ korral täidetud tingimus

$$f(x) = |x| \geq 0 = f(0)\,, \text{ kui } x \in (-\delta, \delta)\,,$$

s.t. funktsioonil f on punktis 0 lokaalne miinimum.

Me nimetasime selliseid sisepunkte c funktsiooni f määramispiirkonnas D, kus $f'(c) = 0$, selle funktsiooni statsionaarseteks punktideks. Kui funktsioon f on diferentseeruv intervalli D sisepunktides, siis saab – kuid ei pruugi (vrd. näide 6.1) – tal ekstreemum olla vaid statsionaarsetes punktides. Nagu eelnev näide ütleb, võib ekstreemum olla ka neis punktides, kus funktsioon ei ole diferentseeruv. See on aluseks järgmisele definitsioonile.

Definitsioon. Määramispiirkonna D sisepunkti c nimetatakse funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ *kriitiliseks punktiks*, kui c on kas statsionaarne punkt või f ei ole kohal c diferentseeruv.

Lause 7.2 *Olgu funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ pidev oma kriitilises punktis c.*
(a) *Kui punktil c leidub niisugune ümbrus $U_\delta(c)$, et $f'(x) \geq 0$ iga $x \in (c-\delta, c)$ korral ja $f'(x) \leq 0$ iga $x \in (c, c+\delta)$ korral, siis on funktsioonil f punktis c lokaalne maksimum.*
(b) *Kui punktil c leidub niisugune ümbrus $U_\delta(c)$, et $f'(x) \leq 0$ iga $x \in (c-\delta, c)$ korral ja $f'(x) \geq 0$ iga $x \in (c, c+\delta)$ korral, siis on funktsioonil f punktis c lokaalne miinimum.*
(c) *Kui punktil c leidub niisugune ümbrus $U_\delta(c)$, et tuletis $f'(x)$ on sama märgiga kõikide $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ korral, siis funktsioonil f kohal c ei ole ekstreemumit.*

Tõestus. (a) Kuna $f'(x) \geq 0$ iga $x \in (c-\delta, c)$ korral, siis lause 7.1(*b*) põhjal on funktsioon f poollõigus $(c-\delta, c]$ kasvav, seega $f(x) \leq f(c)$ iga $x \in (c-\delta, c)$ puhul. Analoogiliselt garanteerib eeldus, et $f'(x) \leq 0$ iga $x \in (c, c+\delta)$ puhul, funktsiooni f kahanemise poollõigus $[c, c+\delta)$, seega $f(c) \geq f(x)$ iga $x \in (c, c+\delta)$ korral. Kokkuvõttes

$$f(x) \leq f(c) \;\text{ kõikide } x \in U_\delta(c) \;\text{ korral,}$$

s.t. funktsioonil f on kohal c lokaalne maksimum.

Väide (b) tõestatakse analoogiliselt (iseseisvalt!)✠. Väite (c) eeldustel kehtivad suvaliste punktide $x_1 \in (c-\delta, c)$ ja $x_2 \in (c, c+\delta)$ korral kas võrratused $f(x_1) \leq f(c) \leq f(x_2)$ või $f(x_1) \geq f(c) \geq f(x_2)$ (selgitada!)✠, seega ei saa funktsioonil f kohal c ekstreemumit olla. ■

Tõestuseta esitame veel järgmise piisava tingimuse funktsiooni ekstreemumite olemasoluks.

Lause 7.3 *Eeldame, et funktsioonil* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *on punktis* $c \in D$ *esimene ja teine tuletis ning*

$$f'(c) = 0 \quad ja \quad f''(c) \neq 0.$$

Kui $f''(c) < 0$*, siis funktsioonil* f *on kohal* c *lokaalne maksimum, juhul* $f''(c) > 0$ *aga lokaalne miinimum.*

Näide 7.4. Leiame funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) := x\sqrt[3]{x-1}$$

lokaalsed ekstreemumid. Kuna iga $x \in \mathbb{R}\diagdown\{1\}$ korral

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt[3]{x-1} + \frac{1}{3}x(x-1)^{-\frac{2}{3}} = (x-1)^{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{x-1+\frac{1}{3}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{4}{3}x-1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned} \tag{7.2}$$

ja kohal 1 funktsioon f ei ole diferentseeruv (kontrollida!)✠, siis on funktsioonil f kaks kriitilist punkti: statsionaarne punkt $x = \frac{3}{4}$ ja punkt $x = 1$.

Võtame punktile $x = \frac{3}{4}$ sellise ümbruse $U_\delta\left(\frac{3}{4}\right)$, et $0 < \delta < \frac{1}{4}$. Kuna murru (7.2) nimetaja $(x-1)^{\frac{2}{3}}$ on positiivne iga $x \in U_\delta\left(\frac{3}{4}\right)$ korral, siis

$$f'(x) < 0, \text{ kui } \frac{3}{4} - \delta < x < \frac{3}{4}, \quad \text{ja} \quad f'(x) > 0, \text{ kui } \frac{3}{4} < x < \frac{3}{4} + \delta.$$

Lause 7.2(b) kohaselt on punktis $x = \frac{3}{4}$ funktsioonil lokaalne miinimum $f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$.

Punkti 1 ümbruses $U_\delta(1)$, kus $0 < \delta < \frac{1}{4}$, on nii murru (7.2) lugeja kui ka nimetaja positiivsed, seega on funktsiooni tuletis sama märgiga iga $x \in U_\delta(1)$ korral. Lause 7.2(c) kohaselt punktis $x = 1$ funktsioonil lokaalset ekstreemumit ei ole.

Näide 7.5. Leiame lause 7.3 abil polünoomi

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 60$$

lokaalsed ekstreemumid. Selleks arvutame esimese tuletise

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x = 12x(x-3)(x+2)$$

nullkohtades $x = 0$, $x = 3$ ja $x = -2$ teise tuletise

$$f''(x) = 36x^2 - 24x - 72$$

väärtused

$$f''(0) = -72 < 0, \;\; f''(3) = 180 > 0 \text{ ja } f''(-2) = 120 > 0.$$

Lause 7.3 kohaselt on $f(0) = 60$ funktsiooni f lokaalne maksimum, arvud $f(-2) = 12$ ja $f(3) = -12$ aga lokaalsed miinimumid.

Näide 7.6. Plekitahvlist mõõtmetega 8×5 on vaja valmistada selline ilma kaaneta karp, mille ruumala oleks maksimaalne. Millised on selle karbi mõõtmed?

Tähistame karbi kõrguse tähega x, siis ruumala arvutatakse valemist

$$V(x) = x(8-2x)(5-2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$$

Antud ülesande seisukohalt on funktsiooni V mõistlik määramispiirkond vahemik $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ (selgitada!)✠. Funktsiooni V tuletise

$$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 4\left(3x^2 - 13x + 10\right)$$

nullkohad on $x_1 = 1$ ja $x_2 = \frac{10}{3}$, kuid neist kuulub vaid x_1 määramispiirkonda. Teise tuletise

$$V''(x) = 24x - 52$$

vastav väärtus on

$$V''(1) = -28 < 0,$$

seega on funktsioonil $V : \left(0, \frac{5}{2}\right) \to \mathbb{R}$ kohal $x_1 = 1$ lokaalne maksimum $V(1) = 18$. Maksimaalse ruumalaga karbi mõõtmed on $6 \times 3 \times 1$.

Globaalsete ekstreemumite leidmine. Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$, siis Weierstrassi teise teoreemi 4.6 põhjal on tal nii globaalne maksimum kui ka globaalne miinimum. Nende leidmise üldine eeskiri on järgmine: leiame kõik lokaalsed ekstreemumid ja funktsiooni väärtused lõigu otspunktides, nende hulgast valime vähima ja suurima arvu, need on vastavalt globaalne miinimum ja globaalne maksimum.

Näide 7.7. Funktsiooni

$$f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, \;\; f(x) := \cos x$$

globaalsete ekstreemumite leidmiseks arvutame tema väärtused lõigu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ otspunktides ning tema ainukeses kriitilises punktis $x = 0$:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \;\; f(0) = 1 \text{ ja } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Seega on globaalne miinimum 0 vasakpoolses otspunktis $-\frac{\pi}{2}$ ning globaalne maksimum statsionaarses punktis 0.

Kui f on pidev mingis intervallis D, mis ei ole lõik, siis ei pruugi globaalseid ekstreemumeid leiduda. Huvitav on järgmine tähelepanek.

Lause 7.4 *Kui intervallis D pideval funktsioonil f on selles intervallis vaid üks lokaalne ekstreemum, siis on see globaalne.*

Tõestus. Olgu funktsioonil f kohal $a \in D$ ainuke lokaalne ekstreemum, olgu see lokaalne maksimum. Oletame vastuväiteliselt, et $f(a)$ ei ole suurim funktsiooni väärtuste hulgas, siis leidub mingi $b \in D$, et $f(b) > f(a)$. Lõigus otspunktidega a ja b on funktsioon pidev, seega on tal mingis punktis c, mis asub a ja b vahel, minimaalne väärtus, niisiis $f(c) < f(a) < f(b)$. Selge, et kohal c on funktsioonil $f : D \to \mathbb{R}$ lokaalne miinimum, mis on vastuolus lause eeldusega, et lokaalseid ekstreemumeid on vaid üks. Sellega on väide tõestatud. ■

7.3 Joone kumerus ja käänupunktid

Olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$ mingi funktsioon, vaatleme xy-tasandil võrrandiga $y = f(x)$ määratud joont, mida me teatavasti nimetame funktsiooni f graafikuks. Võtame suvalised kaks arvu $x_1, x_2 \in D$, kus $x_1 < x_2$, ja tõmbame läbi joone punktide $(x_1, f(x_1))$ ning $(x_2, f(x_2))$ lõikaja, s.o. sirge, mille võrrand on kujul

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

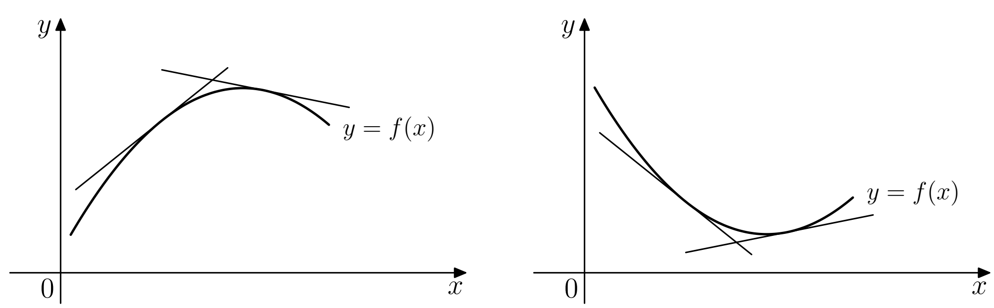
(selgitada!✠; peame silmas, et x_1 ja x_2 on fikseeritud arvud).

Definitsioon. Ütleme, et võrrandiga $y = f(x)$ määratud joon on
1) *nõgus intervallis* D, kui ***iga lõigu*** $[x_1, x_2] \subset D$ korral funktsiooni f graafik selles lõigus on allpool läbi punktide $(x_1, f(x_1))$ ning $(x_2, f(x_2))$ tõmmatud lõikajat, s.t.

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \text{ iga } x \in [x_1, x_2] \text{ korral,}$$

2) *kumer intervallis* D, kui ***iga lõigu*** $[x_1, x_2] \subset D$ korral funktsiooni f graafik selles lõigus on ülalpool läbi punktide $(x_1, f(x_1))$ ning $(x_2, f(x_2))$ tõmmatud lõikajat, s.t.

$$f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \text{ iga } x \in [x_1, x_2] \text{ korral.}$$



Joonis 7.1: Kumer ja nõgus joon.

Kui funktsioon f on diferentseeruv intervalli D igas sisepunktis x, siis on tema graafiku punktides $(x, f(x))$ olemas puutuja. Saab näidata, et sel juhul tähendab joone $y = f(x)$ kumerus (nõgusus) seda, et joon paikneb allpool (ülalpool) tema suvalises punktis võetud puutujat (vt. joonis 7.1). Veelgi enam, kehtib järgmine lause.

Lause 7.5 *Olgu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ lahtises intervallis D diferentseeruv. Joon $y = f(x)$ on intervallis D kumer (nõgus) parajasti siis, kui funktsioon f' on intervallis D kahanev (kasvav).*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et joon $y = f(x)$ on intervallis D kumer. Olgu $x_1, x_2 \in D$ suvalised punktid, olgu $x_1 < x_2$. Kui võtame joonele puutuja nii punktis $(x_1, f(x_1))$ kui ka punktis $(x_2, f(x_2))$, siis funktsiooni graafik kulgeb allpool mõlemat puutjat. Seetõttu (vrd. võrrand (5.7))

$$f(x_2) \leq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) \text{ ehk } f(x_2) - f(x_1) \leq f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

ja

$$f(x_1) \le f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2) \text{ ehk } f(x_2) - f(x_1) \ge f'(x_2)(x_2 - x_1).$$

Siit saame, et $f'(x_2)(x_2 - x_1) \le f'(x_1)(x_2 - x_1)$ ehk

$$f'(x_2) \le f'(x_1), \text{ kui } x_1 < x_2,$$

s.t. f'on kahanev funktsioon.

Piisavus. Eeldame, et f' on intervallis D kahanev funktsioon. Olgu $a \in D$ mingi fikseeritud punkt ja olgu $x \in D$ suvaline. Konkreetsuse mõttes olgu $x > a$. Lõigus $[a, x]$ rahuldab funktsioon f Lagrange'i keskväärtusteoreemi tingimusi, seega leidub selline $c \in (a, x)$, et

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a). \tag{7.3}$$

Kuna $a < c$ ning f' on kahanev funktsioon, siis $f'(c) \le f'(a)$, mistõttu seosest (7.3) saame võrratuse

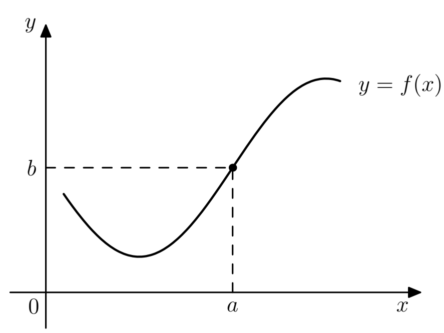
$$f(x) \le f'(a)(x - a) + f(a)$$

iga sellise $x \in D$ korral, mis on suurem arvust a. Analoogiliselt saadakse sama võrratus nende punktide $x \in D$ jaoks, mis on arvust a väiksemad. Kokkuvõttes oleme veendunud, et joone $y = f(x)$ punktid paiknevad allpool puutujat, mis on võetud joone punktis $(a, f(a))$. Kuna punkt $a \in D$ oli valitud suvaliselt, siis oleme tõestanud, et joon $y = f(x)$ on kumer. ■

Lausetest 7.5 ja 7.2 tuleneb järgmine eeskiri joone kumerus- ja nõgususpiirkondade määramiseks.

Lause 7.6 *Olgu funktsioon f lahtises intervallis D kaks korda diferentseeruv. Joon $y = f(x)$ on kumer (nõgus) parajasti siis, kui $f''(x) \le 0$ $(f''(x) \ge 0)$ iga $x \in D$ korral.*

Definitsioon. Joone $y = f(x)$ punkti $(a, f(a))$ nimetatakse selle joone *käänupunktiks*, kui leidub selline $\delta > 0$, et vahemikus $(a - \delta, a)$ on joon kumer ning vahemikus $(a, a + \delta)$ nõgus või vastupidi (vt. joonis 7.2).



Joonis 7.2: Joone käänupunkt.

Olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$ diferentseeruv lahtises intervallis D. Lause 7.5 kohaselt on $(a, f(a))$ joone $y = f(x)$ käänupunkt parajasti siis, kui kohal a funktsiooni f' kasvamine läheb üle kahanemiseks või vastupidi, s.t. kui tuletisel f' on punktis a lokaalne ekstreemum. Kui $(a, f(a))$

on käänupunkt ja funktsioon f on kohal a kaks korda diferentseeruv, siis Fermat' teoreemi põhjal $f''(a) = 0$. Nagu kinnitab järgmine näide, vastupidine väide üldjuhul ei kehti.

Näide 7.8. Funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) := x^4$$

teise tuletise $f''(x) = 12x^2$ kõik väärtused on mittenegatiivsed, lause 7.6 kohaselt on joon $y = x^4$ nõgus ning tal ei ole käänupunkte. Samas $f''(0) = 0$.

Näide 7.9. Leiame joone $y = \sqrt[3]{x^5}$ kumerus- ja nõgususpiirkonnad. Arvutame funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) := \sqrt[3]{x^5}$$

tuletise

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

ja teise tuletise

$$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}},\ \text{kus } x \neq 0.$$

Näeme, et $f''(x) < 0$, kui $x < 0$, ja $f''(x) > 0$, kui $x > 0$. Lause 7.6 põhjal on joon $y = \sqrt[3]{x^5}$ kumer intervallis $(-\infty, 0)$ ja nõgus intervallis $(0, \infty)$, punkt $(0, 0)$ on joone käänupunkt, kuigi kohal $x = 0$ funktsioonil f teist tuletist ei eksisteeri.

Näide 7.10. Leiame funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) := \frac{3}{8}x^4 - x^3 + 2$$

graafiku kumerus- ja nõgususpiirkonnad. Selleks arvutame selle funktsiooni esimese ja teise tuletise:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^3 - 3x^2,\ \ f''(x) = \frac{9}{2}x^2 - 6x = \frac{9}{2}x\left(x - \frac{4}{3}\right).$$

Kuna

$$f''(x) < 0,\ \text{kui } 0 < x < \frac{4}{3},\ \text{ja } f''(x) > 0,\ \text{kui } -\infty < x < 0 \text{ või } \frac{4}{3} < x < \infty,$$

siis lause 7.6 kohaselt on joon $y = \frac{3}{8}x^4 - x^3 + 2$ kumer vahemikus $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ ning nõgus intervallides $(-\infty, 0)$ ja $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$. Punktid $(0, 2)$ ja $\left(\frac{4}{3}, \frac{22}{27}\right)$ on joone käänupunktid.

7.4 Joone asümptoodid

Definitsioon. Kui $f\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ on niisugune funktsioon, et protsessis $x \to \infty$ joone $y = f(x)$ punkt läheneb piiramatult mingile sirgele $y = mx + b$, siis seda sirget nimetatakse joone $y = f(x)$ *kaldasümptoodiks protsessis* $x \to \infty$. Kui seejuures $m = 0$ siis kõneldakse *rõhtasümptoodist.*

Analoogiliselt defineeritakse funktsiooni $f\colon (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ graafiku *kaldasümptoot protsessis* $x \to -\infty$.

Lause 7.7 *Antud sirge $y = mx + b$ on joone $y = f(x)$ kaldasümptoot protsessis $x \to \infty$ parajasti siis, kui*

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ning \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx).$$

Analoogiliselt on sirge $y = mx + b$ joone $y = f(x)$ kaldasümptoot protsessis $x \to -\infty$ parajasti siis, kui

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ning \quad b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx).$$

Definitsioon. Kui $a \in \mathbb{R}$ on selline arv, et funktsioon f on määratud vahemikus $(a - \delta, a)$ mingi $\delta > 0$ korral ja on täidetud üks tingimustest

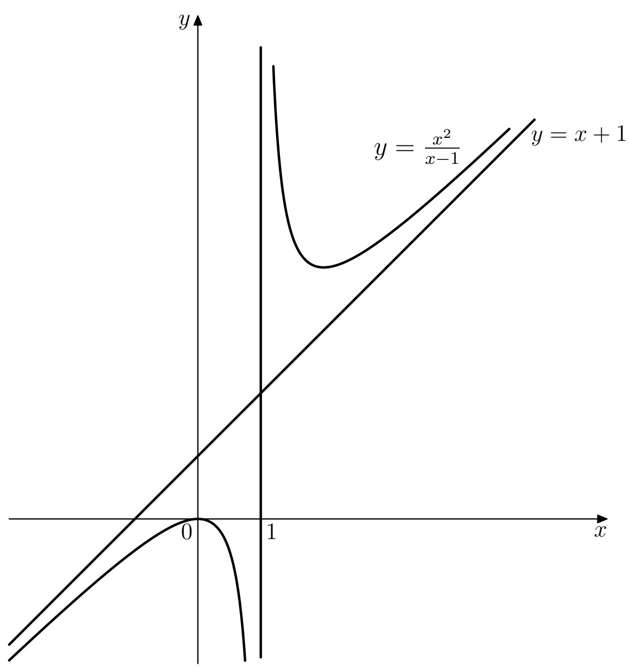
$$\lim_{x\to a-} f(x) = \infty \text{ ja } \lim_{x\to a-} f(x) = -\infty,$$

siis sirget $x = a$ nimetatakse joone $y = f(x)$ *püstasümptoodiks protsessis* $x \to a-$.

Kui funktsioon f on määratud vahemikus $(a, a + \delta)$ mingi $\delta > 0$ korral ja on täidetud üks tingimustest

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \infty \text{ ja } \lim_{x\to a+} f(x) = -\infty,$$

siis sirget $x = a$ nimetatakse joone $y = f(x)$ *püstasümptoodiks protsessis* $x \to a+$.



Joonis 7.3: Joone $y = \frac{x^2}{x-1}$ asümptoodid.

Näide 7.11. Funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x^2}{x-1}$$

graafikul on püstasümptoodiks sirge $x = 1$, sest

$$\lim_{x\to1-} f(x) = -\infty \text{ ning } \lim_{x\to1+} f(x) = \infty.$$

Kuna

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1$$

ja

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

siis sirge $y = x + 1$ on selle joone kaldasümptoot protsessis $x \to \infty$, lihtne on näha, et ka protsessis $x \to -\infty$ (vt. joonis 7.3).

Näide 7.12. Leiame funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ \ f(x) := 2x + \frac{1}{x} + 5$$

graafiku asümptoodid. Selge, et sirge $x = 0$ (s.o. y-telg) on selle joone püstasümptoot:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \left(2x + \frac{1}{x} + 5\right) = -\infty \ \text{ ning } \ \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \left(2x + \frac{1}{x} + 5\right) = \infty.$$

Joonel on ka kaldasümptoot $y = 2x + 5$ nii protsessis $x \to \infty$ kui ka protsessis $x \to -\infty$, nimelt

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}\right) = 2 \text{ ja } b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} + 5\right) = 5,$$

samad piirväärtused saame ka protsessis $x \to -\infty$.

7.5 Funktsiooni käigu uurimine

Funktsiooni uurimisel seatakse eesmärgiks skitseerida tema graafik. Selleks on vaja

• leida funktsiooni määramispiirkond ja tema katkevuspunktid, samuti fikseerida funktsiooni graafiku lõikumispunktid telgedega,

• leida funktsiooni kasvamise ja kahanemise piirkonnad,

• leida funktsiooni lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid,

• leida funktsiooni graafiku kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning tema käänupunktid,

• leida funktsiooni graafiku asümptoodid.

Saadud andete järgi skitseeritaksegi funktsiooni graafik.

Näide 7.13. Vaatleme funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R},\ \ f(x) := 1 - x + \frac{1}{1-x}.$$

Pole kahtlust, et f on oma määramispiirkonnas pidev. Funktsiooni f graafik lõikab y-telge punktis $(0, 2)$, x-teljega tal lõikepunkte ei ole, sest võrrandil

$$1 - x + \frac{1}{1-x} = 0$$

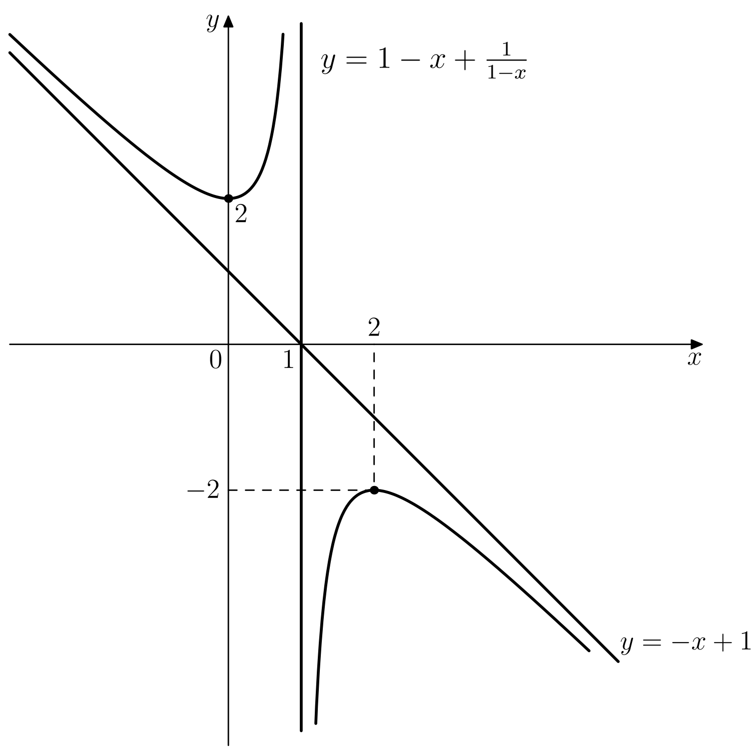
pole lahendeid (kontrollida!)✠. Iga $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ korral

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2},$$
$$f''(x) = \frac{(2-2x)(1-x)^2 + (2x - x^2)\,2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Kuna

$$f'(x) > 0, \text{ kui } x \in (0,2) \setminus \{1\}, \text{ ja } f'(x) < 0, \text{ kui } x \in (-\infty, 0) \text{ või } x \in (2, \infty),$$

siis lause 7.1 põhjal on funktsioon f rangelt kasvav intervallides $[0,1)$ ja $(1,2]$ ning rangelt kahanev intervallides $(-\infty, 0]$ ja $[2, \infty)$. Arvud 0 ja 2 on funktsiooni statsionaarsed punktid, seejuures $f''(0) = 2 > 0$ ning $f''(2) = -2 < 0$. Lause 7.3 kohaselt on $f(0) = 2$ funktsiooni f lokaalne miinimum, $f(2) = -2$ aga lokaalne maksimum.



Joonis 7.4: Funktsiooni $y = 1 - x + \frac{1}{1-x}$ graafik.

Edasi paneme tähele, et

$$f''(x) > 0, \text{ kui } x < 1, \text{ ja } f''(x) < 0, \text{ kui } x > 1.$$

Lause 7.6 põhjal on funktsiooni f graafik kumer intervallis $(1, \infty)$ ning nõgus intervallis $(-\infty, 1)$, käänupunkte sel joonel ei ole.

Kuna

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \infty \text{ ja } \lim_{x \to 1+} f(x) = -\infty,$$

siis sirge $x = 1$ on graafiku püstasümptoot. Arvutame

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x(1-x)} \right) = -1,$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1-x} \right) = 1,$$

samad piirväärtused saame protsessis $x \to -\infty$. Seega on sirge $y = -x + 1$ funktsiooni f graafiku kaldasümptoodiks nii protsessis $x \to \infty$ kui ka protsessis $x \to -\infty$.

Saadud tulemuste järgi skitseerime funktsiooni graafiku (vt. joonis 7.4).

Näide 7.14. Vaatleme funktsiooni

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := \frac{6x}{1+x^2}.$$

Ta on pidev, tema graafiku ainsaks lõikepunktiks telgedega on punkt $(0, 0)$. Arvutame

$$f'(x) = \frac{6(1+x^2) - 12x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{6(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{6(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2},$$
$$f''(x) = 6\frac{-2x(1+x^2)^2 - 6(1-x^2)4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{12x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = \frac{12x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{(1+x^2)^3}$$

ja paneme tähele, et

$$f'(x) > 0, \text{ kui } x \in (-1, 1), \text{ ning } f'(x) < 0, \text{ kui } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Lause 7.1 kohaselt on funktsioon f rangelt kasvav lõigus $[-1, 1]$ ja rangelt kahanev intervallides $(-\infty, -1]$ ning $[1, \infty)$. Kuna

$$f''(-1) = 3 > 0 \ \text{ ja } \ f''(1) = -3 < 0,$$

siis kohal $x = -1$ on funktsioonil lause 7.6 põhjal lokaalne miinimum $f(-1) = -3$, kohal $x = 1$ aga lokaalne maksimum $f(1) = 3$.

Teise tuletise avaldisest saame, et

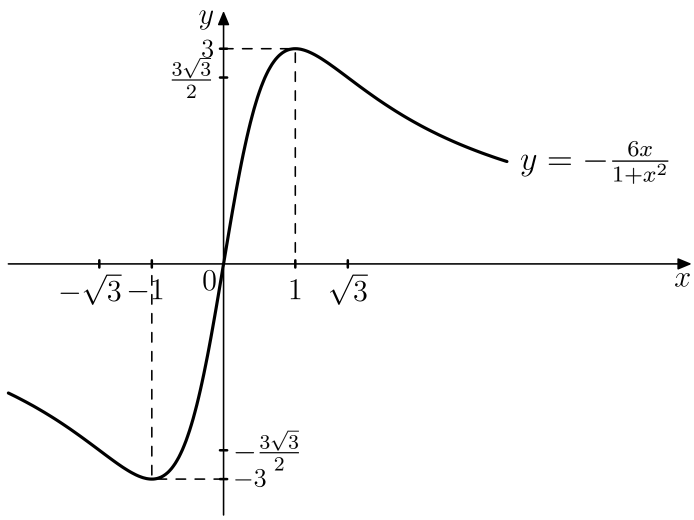
$$f''(x) > 0, \text{ kui } x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right), \text{ ja } f''(x) > 0, \text{ kui } x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right).$$

Seega on funktsiooni f graafik kumer intervallides $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ ja $\left(0, \sqrt{3}\right)$ ning nõgus intervallides $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ ja $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$, tema punktid $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0, 0)$ ning $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ on käänupunktid. Kuna funktsioon f on pidev kogu arvteljel, siis tema graafikul püstasümptoote ei ole, kuid x-telg osutub rõhtasümptoodiks mõlemas protsessis $x \to \infty$ ja $x \to -\infty$. Tõepoolest,

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{1+x^2} = 0 \text{ ja } b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{1+x^2} = 0,$$

sama tulemuse saame protsessis $x \to -\infty$.

Märgime veel, et eelpool leitud lokaalsed ekstreemumid osutuvad globaalseteks ekstreemumiteks.



Joonis 7.5: Funktsiooni $y = \frac{6x}{1+x^2}$ graafik.

Saadud andmete järgi skitseerime funktsiooni f graafiku (vt. joonis 7.5).

Kokkuvõte

Diferentseeruva funktsiooni tuletis annab olulist informatsiooni selle funktsiooni monotoonsuseomaduste kohta: positiivne tuletis kirjeldab funktsiooni kasvamist, negatiivne kahanemist. Kaks korda diferentseeruva funktsiooni teise tuletise märk iseloomustab funktsiooni graafiku kumerust-nõgusust: negatiivne teine tuletis vastab selle joone kumerusele, positiivne nõgususele.

8 Algfunktsioon ja määramata integraal

Selles peatükis vaatleme diferentseerimise pöördoperatsiooni, seda nimetatakse integreerimiseks. Meie eesmärgiks on leida integreerimise põhireeglid ja -võtted.

8.1 Algfunktsioon ja integreerimine

Funktsiooni algfunktsioon. Definitsioon. Kui intervallis D määratud funktsioon f on mingi funktsiooni $F\colon D \to \mathbb{R}$ tuletis selles intervallis, s.t.

$$F'(x) = f(x) \ \text{ iga } x \in D \text{ korral,} \tag{8.1}$$

siis öeldakse, et F on funktsiooni f *algfunktsioon intervallis* D.

Lihtne on näha, et algfunktsioon, kui ta olemas on, ei ole üheselt määratud: kui kehtib seos (12.9), siis suvalise arvu C puhul

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \ \text{ iga } x \in D \text{ korral.}$$

Niisiis, kui F on funktsiooni f algfunktsioon intervallis D, siis on seda ka funktsioon

$$F + C : D \to \mathbb{R}, \quad (F + C)(x) := F(x) + C$$

iga konstandi $C \in \mathbb{R}$ puhul.

Olgu F_1 ja F_2 funktsiooni f kaks suvalist algfunktsiooni intervallis D, s.t.

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \ \text{ iga } x \in D \text{ korral.}$$

Siis

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

ning lause 7.1(a) kohaselt $F_1 - F_2$ on konstantne funktsioon. Niisiis leidub selline $C \in \mathbb{R}$, et $F_1(x) - F_2(x) = C$ ehk

$$F_1(x) = F_2(x) + C \text{ iga } x \in D \text{ korral.}$$

Kokkuvõttes, kui funktsioonil $f\colon D \to \mathbb{R}$ leidub algfunktsioon $F\colon D \to \mathbb{R}$, siis funktsiooni f kõik algfunktsioonid intervallis D saame avaldisest $F + C$, kui anname konstandile C kõikvõimalikud reaalarvulised väärtused.

Etteruttavalt märgime (see tõestatakse allpool teoreemiga 12.8), et ***igal pideval funktsioonil leidub algfunktsioon.***

Funktsiooni määramata integraal. Definitsioon. Avaldist $F(x)+C$, kus F on funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ mingi algfunktsioon ja C on suvaline konstant, nimetatakse funktsiooni f *määramata integraaliks intervallis* D ja märgitakse $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Teisisõnu,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

kus $F'(x) = f(x)$ iga $x \in D$ puhul. Funktsiooni määramata integraali leidmist nimetatakse integreerimiseks. Tegemist on diferentseerimise pöördoperatsiooniga, kusjuures

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

Integreerimise põhivalemid saadakse vahetult tuletise põhivalemitest:
1) $\int c\mathrm{d}x = cx + C$ intervallis $\mathbb{R}$ iga $c \in \mathbb{R}$ puhul,
2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ intervallides $\begin{cases} \mathbb{R}, & \text{kui } \alpha \in \mathbb{N}_0, \\ (-\infty, 0) \text{ ja } (0, \infty), & \text{kui } \alpha = -2, -3, \ldots, \\ (0, \infty), & \text{kui } \alpha \in \mathbb{R}\diagdown\mathbb{Z}, \end{cases}$
3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$ intervallides $(-\infty, 0)$ ja $(0, \infty)$,
4) $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$ intervallis $\mathbb{R}$ iga $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$ puhul,
5) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$ ja $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$ intervallis $\mathbb{R}$,
6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$ igas intervallis $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, kus $k \in \mathbb{Z}$,
7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ igas intervallis $(k\pi, (k+1)\pi)$, kus $k \in \mathbb{Z}$,
8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$ intervallis $(-1, 1)$,
9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$ intervallis $\mathbb{R}$.

Näide 8.1. Kontrollime valemi 3) kehtivust. Selge, et see võrdus kehtib, kui $x > 0$, sel juhul $|x| = x$ ning $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Vaatleme funktsioone

$$f\colon (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := \frac{1}{x}$$

ning

$$F\colon (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, \ \ F(x) := \ln|x| = \ln(-x),$$

siis

$$F'(x) = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} = f(x)$$

iga $x < 0$ korral. Seega kehtib valem 3) ka intervallis $(-\infty, 0)$.

Näide 8.2. Määramata integraali

$$\int \cos 7x\mathrm{d}x$$

leidmisel peame silmas, et $(\sin 7x)' = 7\cos 7x$ ehk

$$\left(\frac{1}{7}\sin 7x\right)' = \frac{1}{7}(\sin 7x)' = \cos 7x.$$

Seega on funktsioon

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ F(x) := \frac{1}{7}\sin 7x$$

funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := \cos 7x$$

algfunktsioon. Niisiis,

$$\int \cos 7x\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\sin 7x + C.$$

8.2 Integreerimisreeglid

Kõigepealt märgime, et kuna määramata integraali väärtus ei ole üheselt määratud, siis kõiki võrdusi, mis sisaldavad määramata integraale, mõistetakse järgmiselt: igale vasaku poole väärtusele leidub paremal pool võrdne väärtus ja vastupidi, igale parema poole väärtusele leidub vasakul pool võrdne väärtus.

Funktsioonide summa ja kordsete integreerimine taandub diferentseerimise vastavate reeglite rakendamisele.

Lause 8.1 *Kui intervallis D määratud funktsioonidel f ja g eksisteerivad selles intervallis määramata integraalid $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ning $\int g(x)\,\mathrm{d}x$, siis eksisteerib ka määramata integraal $\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x$ ja kehtib seos*

$$\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tõestus. Eeldatavasti eksisteerivad $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C_1$ ning $\int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x)+C_2$, mistõttu

$$(F+G)'(x) = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x),$$

s.t. $F+G$ on funktsiooni $f+g$ algfunktsioon intervallis D. Seega

$$\begin{aligned}\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x &= \int (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = (F+G)(x)+C\\ &= F(x)+G(x)+C\\ &= (F(x)+C_1)+(G(x)+C_2)\\ &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Seejuures olgu märgitud, et fikseeritud konstandi C puhul saame valida konstandid C_1 ning C_2, et $C = C_1 + C_2$, ja vastupidi, fikseeritud arvude C_1 ja C_2 korral võtame $C := C_1 + C_2$. ∎

Analoogiliselt tõestatakse järgmine lause.

Lause 8.2 *Kui funktsioonil f eksisteerib intervallis D määramata integraal $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, siis suvalise $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ korral eksisteerib ka integraal $\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x$ ning kehtib seos*

$$\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Näide 8.3. Lausete 8.1 ja 8.2 abil leiame integreerimise põhivalemeid rakendades

$$\begin{aligned}\int \left(4x^3-5x+12\right)\mathrm{d}x &= 4\int x^3\mathrm{d}x - 5\int x\mathrm{d}x + 12\int \mathrm{d}x\\ &= x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 12x + C\end{aligned}$$

suvalise $x \in \mathbb{R}$ puhul.

Näide 8.4. Analoogiliselt eelmise näitega arvutame

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}-x^3}{x^4}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x^4} - \frac{x^3}{x^4}\right)\mathrm{d}x = \int \left(x^{-\frac{11}{3}} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int x^{-\frac{11}{3}}\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{3}{8}x^{-\frac{8}{3}} - \ln|x| + C$$

intervallides $(-\infty, 0)$ ja $(0, \infty)$.

Ositi integreerimine. Olgu funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ diferentseeruvad, siis ka nende korrutis

$$fg : D \to \mathbb{R}, \quad fg\,(x) := f\,(x)\,g\,(x)$$

on lause 5.4 kohaselt difentseeruv ja $(fg)' = f'g + fg'$, seega

$$fg' = (fg)' - f'g.$$

Siit tuleneb vahetult järgmine väide, mida nimetatakse ***ositi integreerimise reegliks.***

Lause 8.3 *Olgu funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ diferentseeruvad. Kui intervallis D on olemas integraal $\int f'(x)\,g\,(x)\,\mathrm{d}x$, siis eksisteerib ka integraal $\int f\,(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$ ning*

$$\int f\,(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f\,(x)\,g\,(x) - \int f'(x)\,g\,(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.2}$$

Näide 8.5. Leiame valemi (8.2) abil määramata integraali

$$\int x\cos x\mathrm{d}x.$$

Selleks võtame

$$f\,(x) := x \text{ ja } g\,(x) := \sin x,$$

siis $g'(x) = \cos x$ ning

$$\int x\cos x\mathrm{d}x = \int f\,(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\mathrm{d}x$$
$$= x\sin x + \cos x + C$$

suvalise $x \in \mathbb{R}$ korral.

Näide 8.6. Integraali

$$\int \sin^2 x\mathrm{d}x$$

arvutamiseks võtame

$$f\,(x) := \sin x \text{ ja } g\,(x) := -\cos x,$$

siis $g'(x) = \sin x$ ning

$$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \int f\,(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x\cos x + \int (\sin x)'\cos x\mathrm{d}x$$
$$= -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\mathrm{d}x = -\sin x\cos x + \int \left(1-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x$$
$$= -\sin x\cos x + \int \mathrm{d}x - \int \sin^2 x\mathrm{d}x$$
$$= -\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\mathrm{d}x,$$

niisiis

$$2\int \sin^2 x \mathrm{d}x = x - \sin x \cos x + C$$

ehk (peame silmas, et $\sin 2x = 2\sin x \cos x$)

$$\int \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{C}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{C}{2}$$

iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Märgime, et kuna C oli suvaline reaalarv, siis on seda eelnevas seoses ka arv $\frac{C}{2}$ (selgitada!)✠, seega võime kirjutada

$$\int \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Sama tulemuseni jõuame mõnevõrra lihtsamalt trigonomeetrilisi seoseid

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x \text{ ning } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

kasutades. Nimelt saame nende abil võrduse $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, seega

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \mathrm{d}x &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x \mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

Muutujate vahetus määramata integraalis. Olgu F funktsiooni $f\colon T \to \mathbb{R}$ algfunktsioon intervallis T, s.t. $F'(x) = f(x)$ iga $x \in T$ korral. Olgu $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ selline intervallis D diferentseeruv funktsioon, et

$$\varphi(D) = \{\varphi(x) \mid x \in D\} \subset T.$$

Vaatleme liitfunktsiooni $F \circ \varphi\colon D \to \mathbb{R}$, kus $F \circ \varphi(x) := F(\varphi(x))$, selle mõlemad komponendid F ja φ on diferentseeruvad. Vastavalt lausele 5.6 on $F \circ \varphi$ hulgas D diferentseeruv ning

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

s.t. $F \circ \varphi$ on funktsiooni $(f \circ \varphi)\varphi'$ algfunktsioon intervallis D ja

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C \tag{8.3}$$

iga $x \in D$ korral.

Näide 8.7. Määramata integraali

$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$$

arvutamiseks intervallis $\mathbb{R}$ võtame

$$\varphi(x) := x^2 \quad \text{ning} \quad f(t) := e^t,$$

siis
$$xe^{x^2} = \frac{1}{2} f'\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)$$
iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Paneme tähele, et
$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F\left(t\right) := e^t$$
on funktsiooni f algfunktsioon, seega valemi (8.3) kohaselt
$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}F\left(\varphi\left(x\right)\right) + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Näide 8.8. Määramata integraali
$$\int \sin x \cos x \mathrm{d}x$$
arvutamiseks intervallis $\mathbb{R}$ võtame
$$\varphi\left(x\right) := \sin x \quad \text{ja} \quad f\left(t\right) := t,$$
seejuures
$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F\left(t\right) := \frac{1}{2}t^2$$
on funktsiooni f algfunktsioon intervallis $\mathbb{R}$. Kuna
$$\sin x \cos x = f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)$$
iga $x \in \mathbb{R}$ puhul, siis valemi (8.3) põhjal
$$\begin{aligned}\int \sin x \cos x \mathrm{d}x &= \int f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)\mathrm{d}x = F\left(\varphi\left(x\right)\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\sin^2 x + C.\end{aligned}$$

Näide 8.9. Arvutame määramata integraali
$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x,$$
intervallis $(0, \infty)$. Selleks võtame valemis (8.3)
$$\varphi\left(x\right) := \ln x, \quad f\left(t\right) := t \quad \text{ja} \quad F\left(t\right) := \frac{1}{2}t^2$$
ning saame, et
$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x &= \int f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)\mathrm{d}x = F\left(\varphi\left(x\right)\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln^2 x + C.\end{aligned}$$

Kokkuvõte

Funktsiooni f algfunktsiooniks mingis intervallis D nimetatakse niisugust funktsiooni $F\colon D \to \mathbb{R}$, mille tuletiseks on f, s.t. $F'(x) = f(x)$ iga $x \in D$ korral. Määramata integraal $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, kus C on suvaline reaalarv, on algfunktsiooni üldkuju. Algfunktsiooni leidmise operatsiooni nimetatakse integreerimiseks, integreerimise põhivalemid saadakse diferentseerimise põhivalemitest.

Diferentseerimisreeglitest saadakse integreerimise põhilised reeglid. Kui eksisteerivad integraalid $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ja $\int g(x)\,\mathrm{d}x$, siis eksisteerivad ka $\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x$ ja $\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x$ ning kehtivad seosed $\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$ ja $\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Ositi integreerimise valem $\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ saadakse korrutise diferentseerimise reegli abil. Liitfunktsiooni diferentseerimise eeskiri (s.o. ahelareegel) on aluseks muutuja vahetusele määramata integraalis.

9 Arvread, nende koonduvus

Arvridade puhul on tegemist liitmisprotsessiga, milles osaleb lõpmata palju, täpsemalt, loenduv arv liidetavaid. Et anda sellisele liitmisele matemaatiliselt korrektne sisu, võetakse appi koonduvad jadad. Me esitame selles peatükis arvrea mõiste, defineerime selle koonduvuse ja hajuvuse ning uurime koonduvate ridade lihtsamaid omadusi.

Kõigepealt tuleme korraks tagasi arvjadade juurde, vaatleme nende monotoonsuseomadusi.

9.1 Monotoonsed jadad

Meenutame (vt. definitsioon (2.2)), et arvu a nimetatakse jada (x_n) piirväärtuseks (tähistame kas $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ või $x_n \to a$), kui suvalise $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $|x_n - a| < \varepsilon$ kõikide $n \geq N$ puhul. Jada (x_n) nimetatakse sel juhul koonduvaks. Iga koonduv jada (x_n) on tõkestatud (vt. lause 2.1), s.t. jada liikmete hulk $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on nii ülalt kui alt tõkestatud. Koonduvate jadade puhul kehtivatest arvutuseeskirjadest meenutame veel, et kui $x_n \to a$ ja $y_n \to b$, siis $x_n + y_n \to a + b$ ning suvalise $\lambda \in \mathbb{R}$ korral $\lambda x_n \to \lambda a$ (vt. lause 2.6).

Mittekoonduvat jada nimetatakse hajuvaks. Me kirjutame $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ ($\lim_n x_n = -\infty$), kui iga $M > 0$ puhul saab valida niisuguse $N \in \mathbb{N}$, et suvalise $n \geq N$ korral $x_n > M$ (vastavalt $x_n < -M$).

Monotoonsed jadad. Arvestades asjaolu, et jada on funktsioon määramispiirkonnaga $\mathbb{N}$, saame monotoonse funktsiooni definitsioonist (vt. alapunkt 4.2), et jada (x_n) on

- *kasvav*, kui $x_{n+1} \geq x_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral,
- *rangelt kasvav*, kui $x_{n+1} > x_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral,
- *kahanev*, kui $x_{n+1} \leq x_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral,
- *rangelt kahanev*, kui $x_{n+1} < x_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral,
- *monotoonne*, kui ta on kas kasvav või kahanev.

Järgmine lause, mis kirjeldab monotoonsete jadade koonduvust, järeldub pidevuse aksioomist.

Lause 9.1 ***(monotoonsuseprintsiip)***. *Monotoonne jada (x_n) koondub parajasti siis, kui ta on tõkestatud. Kui (x_n) on seejuures kasvav, siis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, kui (x_n) on kahanev, siis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Tõestus. *Tarvilikkus* on selge, sest iga koonduv jada on tõkestatud.

Piisavus. Olgu (x_n) selline kasvav jada, mis on tõkestatud. Sel juhul on hulk $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ülalt tõkestatud ning pidevuse aksioomi kohaselt on tal ülemine raja $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} =: b$. Näitame, et $\lim\limits_{n} x_n = b$.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna b on hulga $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ vähim ülemine tõke, siis $b - \varepsilon$ ei ole selle hulga ülemiseks tõkkeks, järelikult leidub selline jada liige x_N, mis on arvust $b - \varepsilon$ suurem. Kuna jada (x_n) on kasvav, siis

$$b - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq b < b + \varepsilon, \text{ kui } n \geq N.$$

Seega

$$-\varepsilon < x_n - b < \varepsilon$$

ehk

$$|x_n - b| < \varepsilon.$$

iga $n \geq N$ korral.

Kokkuvõttes saab iga $\varepsilon > 0$ korral valida indeksi N nii, et $|x_n - b| < \varepsilon$ kõikide $n \geq N$ puhul, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

Analoogiliselt selgub, et tõkestatud kahanev jada (x_n) koondub arvuks $\inf \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

■

Näide 9.1. Teatavasti $\inf \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = 0$ (vt. näide 1.3), seega monotoonsuseprintsiibi kohaselt on arv 0 rangelt kahaneva jada $\left(\frac{1}{n}\right)$ piirväärtus, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (vrd. näide 3.1).

9.2 Koonduvad ja hajuvad arvread

Definitsioon. Olgu (u_k) mingi arvjada. Avaldist

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots,$$

mida me edaspidi tavaliselt märgime kujul

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k,$$

nimetame *arvreaks* (ehk lühidalt *reaks*), arve u_k selle rea *liikmeteks.*

Antud rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ puhul moodustame tema *osasummad*

$$s_1 := u_1, \quad s_2 := u_1 + u_2, \ldots, \quad s_n := \sum_{k=1}^{n} u_k, \ldots$$

ja *osasummade jada* (s_n).

Definitsioon. Kui rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ osasummade jadal (s_n) on olemas (kas lõplik või lõpmatu) piirväärtus s, siis seda nimetatakse rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *summaks,* sel juhul kirjutame

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = s.$$

Kui piirväärtus s on lõplik, siis ütleme, et rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ on *koonduv* (summaks s). Mittekoonduvat rida nimetatakse *hajuvaks.*

Antud definitsiooni kohaselt on juhul $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$ või $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = -\infty$ tegemist hajuva reaga. Rõhutame, et kui real on summa, siis *sümboliga* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *tähistatakse nii rida ennast kui ka tema summat.*

Mõnikord on otstarbekas nummerdada rea liikmed nii, et esimene liige on indeksiga 0, s.t.

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots,$$

kuid samuti võivad rea indeksid alata suvalisest naturaalarvust p, s.t.

$$\sum_{k=p}^{\infty} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n + \ldots .$$

Näitame, et **lõpliku arvu rea liikmete kustutamine ei mõjuta selle rea koonduvust.** Vaatleme koos reaga $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ka rida $\sum\limits_{k=p}^{\infty} u_k$, mis on saadud esialgsest reast liikmete $u_1, \ldots, u_{p-1}$ ärajätmisel. Need ärajäetavad liikmed moodustavad rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ osasumma $s_{p-1} = \sum\limits_{k=1}^{p-1} u_k$. Tähistame

$$r_m := \sum_{k=p}^{m} u_k \quad \text{iga } m \geq p \text{ korral},$$

s.t. r_m on rea $\sum\limits_{k=p}^{\infty} u_k$ m-s osasumma. Suvalise $n \geq p$ puhul

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{p-1} u_k + \sum_{k=p}^{n} u_k = s_{p-1} + r_n,$$

kusjuures arv s_{p-1} on protsessis $n \to \infty$ konstant. Seega eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ siis ja ainult siis, kui eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$, sel juhul

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s_{p-1} + \lim_{n\to\infty} r_n. \tag{9.1}$$

Me tõestasime järgmise väite.

Lause 9.2 *Rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub parajasti siis, kui koondub rida $\sum\limits_{k=p}^{\infty} u_k$ suvalise $p \in \mathbb{N}$ korral.*

Tarvilik tingimus rea koonduvuseks. Ridade puhul on põhiküsimus selles, kuidas antud rea korral teha kindlaks, kas ta koondub või hajub. Otstarbekas on alustada järgmise tarviliku tingimuse kontrollimisest.

Lause 9.3 *Kui rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub, siis $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$.*

Tõestus. Kui rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub, siis eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} s_n =: s$. Kuna

$$u_n = u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n - u_1 - \cdots - u_{n-1} = s_n - s_{n-1},$$

siis lauset 2.6(d) rakendades saame, et

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Väide on tõestatud. ■

Näide 9.2. Rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$$

osasummad moodustavad hajuva jada

$$(-1, 0, -1, 0, \dots)$$

(kontrollida!)✠, seega on tegemist hajuva reaga.

Näide 9.3. Rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1$$

hajub, sest tema osasummade jada

$$(n) = (1, 2, 3, \dots)$$

on tõkestamata, seega hajuv.

Lause 9.4 ***Geomeetriline rida***

$$1 + q + q^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

koondub parajasti siis, kui $|q| < 1$.

Tõestus. Seose

$$(1-q)\left(1 + q + q^2 + \dots + q^n\right) = 1 - q^{n+1}$$

kohaselt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

suvalise $n \in \mathbb{N}_0$ korral. Kui $|q| < 1$, siis $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ (vrd. lause 2.7), mistõttu

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^{n+1} \\ &= \frac{1}{1-q}.\end{aligned}$$

Seega juhul $|q| < 1$ rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ koondub summaks $\frac{1}{1-q}$.

Kui $|q| \geq 1$, siis lause 2.7 kohaselt $\left|q^k\right| = |q|^k \nrightarrow 0$ (veenduda!)✠. Seega ei ole tarvilik tingimus rea koonduvuseks täidetud, tähendab, sel juhul geomeetriline rida hajub. ■

Lause 9.5 *Rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *hajub.*

Tõestus. Vaatleme rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ osasummasid indeksiga 2^n $(n \in \mathbb{N})$ ja paneme tähele, et

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \cdots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \end{aligned} \tag{9.2}$$

iga $n \in \mathbb{N}$ puhul. Kui oletada vastuväiteliselt, et rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ koondub, s.t. tema osasummade jada (s_n) on koonduv, siis lause 2.1 põhjal on jada (s_n) tõkestatud:

$$\exists M > 0 : s_n \leq M \text{ iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Kuid see on vastuolus eelpool saadud võrratusega (9.2), nimelt, kui võtame $n \geq 2M$, siis

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2} > M.$$

Saadud vastuolu kinnitab, et vastuväiteline oletus ei pea paika, s.t. rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajub. ∎

Järeldus 9.6 *Tarvilik tingimus* $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ *ei ole piisav rea* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *koonduvuseks.*

Harmoonilised read. Üldiselt nimetatakse rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, kus $\alpha > 0$, *harmooniliseks reaks.* Tõestuseta esitame järgmise olulise väite selliste ridade koonduvuse kohta.

Lause 9.7 *Harmooniline rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ *koondub parajasti siis, kui* $\alpha > 1$.

Tehted koonduvate ridadega. Rea koonduvuse definitsioonist ning koonduvate jadade omadustest (vt. lause 2.6 (a) ja (c)) tuleneb järgmine lause.

Lause 9.8 *Kui read* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *ja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *koonduvad vastavalt summaks* s *ja* t, *siis kehtivad järgmised väited:*

(a) *rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k)$ *koondub summaks* $s + t$,

(b) *rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda u_k$ *koondub summaks* λs *iga reaalarvu* λ *korral,*

(c) *rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_k - v_k)$ *koondub summaks* $s - t$.

Tõestus. (a) Eeldame, et read $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ koonduvad vastavalt summaks s ja t, ning tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{ja} \quad t_n := \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Eelduse kohaselt $s_n \to s$ ja $t_n \to t$. Koonduvate jadade omaduse 2.6(a) põhjal

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k = s_n + t_n \to s + t,$$

s.t. rida $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k)$ koondub summaks $s + t$.

Väited (b) ja (c) jäävad lugejale iseseisvaks tõestamiseks. ■

9.3 Võrdluslaused

Mittenegatiivsete liikmetega read. Kui rea $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ liikmed on kõik mittenegatiivsed, s.t. $u_k \geq 0$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral, siis

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1} = s_n + u_{n+1} \geq s_n \text{ suvalise } n \in \mathbb{N} \text{ korral},$$

s.t. rea $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ osasummade jada (s_n) on kasvav. Monotoonsuseprintsiibi (vt. lause 9.1) kohaselt kehtib järgmine väide.

Lause 9.9 *Mittenegatiivsete liikmetega rida* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *koondub parajasti siis, kui ta osasummade jada* (s_n) *on tõkestatud.*

Tõestus. Eelneva märkuse põhjal on rea $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ osasummade jada (s_n) kasvav, vastavalt monotoonsuseprintsiibile koondub ta parajasti siis, kui ta on tõkestatud. ■

Võrdluslaused. Mittenegatiivsete liikmetega ridade koonduvuse testimiseks on mitmeid nn. koonduvustunnuseid. Suurem osa neist tugineb järgmisel väitel, mida nimetatakse ridade ***esimeseks võrdluslauseks.***

Lause 9.10 *Olgu* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *ja* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ *sellised read, et*

$$0 \leq u_k \leq v_k \text{ iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral.} \tag{9.3}$$

(a) *Kui rida* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ *koondub, siis koondub ka rida* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

(b) *Kui rida* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *hajub, siis hajub ka rida* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$.

Tõestus. (a) Tähistame

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} u_k \ \text{ ja } \ t_n := \sum_{k=1}^{n} v_k,$$

eeldusest (13.1) tuleneb, et

$$0 \le s_n \le t_n \text{ suvalise } n \in \mathbb{N} \text{ puhul} \tag{9.4}$$

(selgitada!)✠. Eeldame, et rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ koondub, siis (t_n) on koonduv jada, seega on ta tõkestatud: leidub selline $M > 0$, et $0 \le t_n \le M$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Tingimuse (9.4) põhjal

$$0 \le s_n \le M \ \text{ kõikide } n \in \mathbb{N} \text{ puhul},$$

seega on ka jada (s_n) tõkestatud. Lause 9.9 kohaselt tähendab see rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koonduvust.

Väide (b) tuleneb vahetult väitest (a) (veenduda!)✠. ■

Järeldus 9.11 *Lause* 9.10 *väited* (a) *ja* (b) *kehtivad, kui leidub selline* $N \in \mathbb{N}$, *et*

$$0 \le u_k \le v_k \text{ iga } k \ge N \text{ korral.} \tag{9.5}$$

Tõestus. (a) Eeldame, et tingimus (9.5) on täidetud ja rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ koondub, lause 9.2 kohaselt on rida $\sum\limits_{k=N}^{\infty} v_k$ koonduv. Ridadele $\sum\limits_{k=N}^{\infty} u_k$ ja $\sum\limits_{k=N}^{\infty} v_k$ lauset 9.10(a) rakendades saame, et $\sum\limits_{k=N}^{\infty} u_k$ koondub. Lause 9.2 põhjal koondub siis ka rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Väide (b) tuleneb väitest (a). ■

Näide 9.4. Uurime rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

koonduvust. Kuna $2k - 1 = k + (k-1) \ge k$, siis $\frac{1}{2k-1} \le \frac{1}{k}$ ning

$$\frac{1}{(2k-1)^2} \le \frac{1}{k^2} \text{ iga } k \in \mathbb{N} \text{ puhul.}$$

Olgu

$$u_k := \frac{1}{(2k-1)^2} \text{ ja } v_k := \frac{1}{k^2},$$

siis harmooniline rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ koondub (vrd. lause 9.7), lause 9.10(a) kohaselt koondub ka rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, tähendab, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ on koonduv rida.

Näide 9.5. Rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\left(k+\sqrt{k}+1\right)}$$

koonduvuse uurimiseks paneme tähele, et $\sqrt{k}\left(k+\sqrt{k}+1\right) = k\sqrt{k}+k+\sqrt{k} > k\sqrt{k}$, mistõttu iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\frac{1}{\sqrt{k}\left(k+\sqrt{k}+1\right)} < \frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}.$$

Kuna harmooniline rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ koondub (vrd. lause 9.7), siis võrdluslause 9.10(a) põhjal on ka rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\left(k+\sqrt{k}+1\right)}$ koonduv.

Näide 9.6. Võrdluslause 9.10(a) kohaselt rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 2^k}{k^3+k+6}$$

koondub, sest

$$0 \leq \frac{\cos^2 2^k}{k^3+k+6} < \frac{1}{k^3} \text{ iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral}$$

ning harmooniline rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ on koonduv.

Näide 9.7. Veendume, et rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+5)}{k}$$

hajub. Tõepoolest, rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajub ja

$$\frac{\ln(k+5)}{k} > \frac{\ln e}{k} = \frac{1}{k} \text{ iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral,}$$

lause 9.10(b) põhjal on $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+5)}{k}$ hajuv rida.

Tõestuseta esitame veel ***teise võrdluslause.***

Lause 9.12 *Eeldame, et* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *ja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *on positiivsete liikmetega read ning eksisteerib lõplik piirväärtus*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} =: L \neq 0.$$

Sel juhul rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *koondub parajasti siis, kui koondub rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$.

Näide 9.8. Uurime teise võrdluslause abil rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 1}{k2^k + 1}$$

koonduvust. Selleks võtame

$$u_k := \frac{2^k + 1}{k2^k + 1} \text{ ja } v_k := \frac{1}{k},$$

siis

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k\left(2^k + 1\right)}{k2^k + 1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k2^k + k}{k2^k + 1}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2^k}}{1 + \frac{1}{k2^k}} = 1.$$

Rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ hajub, lause 9.12 põhjal hajub ka rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, niisiis on $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+1}{k2^k+1}$ hajuv rida.

Näide 9.9. Võrdleme rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 - 2k + 2}$$

koonduva reaga $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Kui

$$u_k := \frac{k}{k^3 - 2k + 2} \text{ ja } v_k := \frac{1}{k^2},$$

siis

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3}{k^3 - 2k + 2} = 1,$$

lause 9.12 kohaselt on rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3-2k+2}$ koonduv.

Ridade absoluutne koonduvus. Antud rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ puhul vaatleme tema liikmete absoluutväärtustest moodustatud (mittenegatiivsete liikmetega) rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$.

Definitsioon. Ütleme, et rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *koondub absoluutselt*, kui $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ on koonduv rida.

Selge, et mittenegatiivsete liikmetega rida koondub parajasti siis, kui ta koondub absoluutselt. Üldisemalt kehtib järgmine lause.

Lause 9.13 *Iga absoluutselt koonduv rida on koonduv.*

Tõestus. Olgu rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ absoluutselt koonduv, s.t. rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ koondub. Meie eesmärgiks on veenduda, et ka rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub. Tähistame iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$v_k := |u_k| - u_k,$$

siis

$$0 \leq v_k \leq 2\,|u_k|$$

(selgitada!)✠. Esimese võrdluslause kohaselt on rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ koonduv (selgitada!)✠ ja kuna

$$u_k = |u_k| - v_k \text{ iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral,}$$

siis lause 9.8(c) põhjal koondub ka rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. ■

Kokkuvõte

Arvreaks nimetatakse avaldist $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots$, kompaktsemalt tähistatakse seda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. Kuna arvude liitmine on defineeritud vaid lõpliku arvu liidetavate jaoks, siis avaldisele $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots$, mis formaalselt väljendab lõpmata paljude liidetavate summat, sisu andmiseks rakendatakse jada piirväärtuse mõistet. Öeldakse, et arvrida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub summaks s, kui arv s on tema osasummade $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ $(n \in \mathbb{N})$ jada (s_n) piirväärtus, s.t. kui $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Selle definitsiooni järgi jagunevad read koonduvateks ja hajuvateks.

Rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koonduvuseks on lihtne tarvilik tingimus: $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$. See tingimus ei ole piisav, näiteks rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajub, kuigi $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Kaks tähtsat näidet koonduvatest ridadest:

- geomeetriline rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + \cdots + q^n + \ldots$ koondub parajasti siis, kui $|q| < 1$, sel juhul $s = \frac{1}{1-q}$,
- harmooniline rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$ koondub parajasti siis, kui $\alpha > 1$.

Kuna mittenegatiivsete liikmetega rea osasummad moodustavad kasvava jada, siis jadade monotoonsuseprintsiibi kohaselt koondub selline rida parajasti siis, kui tema osasummade jada on tõkestatud. Mittenegatiivsete liikmetega ridade koonduvuse testimisel saab sageli kasutada järgmist võrdluslauset: kui $0 \leq u_k \leq v_k$ mingist indeksist N alates ja rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ koondub, siis koondub ka rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui koondub rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$. Iga absoluutselt koonduv rida on koonduv.

10 Ridade koonduvustunnused. Astmeread

Selles peatükis leiame mõned lihtsamad tunnused, millega testitakse ridade koonduvust.

10.1 Cauchy ja D'Alemberti koonduvustunnus

Koonduvustunnused, mille abil testitakse ridade koonduvust ja hajuvust, põhinevad testitava rea võrdlemisel mingi konkreetse koonduva või hajuva reaga. Käesolevas alapunktis esitame kaks koonduvustunnust, mis mõlemad baseeruvad võrdlusel geomeetrilise reaga $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$.

Lause 10.1 ***(Cauchy koonduvustunnus).*** *Rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *koondub* ***absoluutselt****, kui eksisteerib piirväärtus* $c := \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|}$ *ning* $c < 1$*. Kui* $c > 1$*, siis rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *hajub.*

Tõestus. Eeldame, et $c < 1$. Valime arvu q omadusega $c < q < 1$, olgu $\varepsilon := q - c$, siis $\varepsilon > 0$ ning $q = c + \varepsilon$. Kuna $\sqrt[k]{|u_k|} \to c$, siis leidub niisugune indeks N, et $\left|\sqrt[k]{|u_k|} - c\right| < \varepsilon$ kõikide $k \geq N$ puhul. Seega

$$\sqrt[k]{|u_k|} < c + \varepsilon = q$$

(kontrollida!)✠ ehk

$$|u_k| < q^k \text{ iga } k \geq N \text{ korral.}$$

Ridadele $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ ja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ rakendame esimest võrdluslauset, täpsemalt selle järeldust 9.11. Kuna $0 < q < 1$, siis geomeetriline rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ koondub (vrd. lause 9.4), seega koondub ka rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$. Teisisõnu, rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub absoluutselt.

Kui $c > 1$, siis valime $\varepsilon \in (0, c-1)$, sel juhul $1 < c - \varepsilon < c$. Kuna arv c on jada $\left(\sqrt[k]{|u_k|}\right)$ piirväärtus, siis leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et

$$1 < c - \varepsilon < \sqrt[k]{|u_k|} < c + \varepsilon \text{ kõikide } k \geq N \text{ korral}$$

(selgitada!)✠, järelikult

$$|u_k| > 1, \text{ kui } k \geq N.$$

On selge, et tarvilik tingimus $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ (vt. lause 9.3) ei ole sel juhul täidetud, tähendab, rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ hajub. ■

Näide 10.1. Rida

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^k k}.$$

koondub Cauchy koonduvustunnuse kohaselt, sest

$$c = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0 < 1.$$

Näide 10.2. Rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k^{100}}$$

puhul

$$\begin{aligned} c &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|} = \lim_{k\to\infty} 2\sqrt[k]{\frac{1}{k^{100}}} = 2\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sqrt[k]{k}\right)^{100}} \\ &= 2\frac{1}{\left(\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}\right)^{100}} = 2\frac{1}{1^{100}} = 2 > 1 \end{aligned}$$

(vrd. lause 2.9), seega vaadeldav rida hajub.

Tõestuseta esitame järgmise ***d'Alemberti koonduvustunnuse.***

Lause 10.2 *Rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *koondub* ***absoluutselt****, kui eksisteerib piirväärtus* $d := \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|$ *ning* $d < 1$*. Kui* $d > 1$*, siis rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *hajub.*

Näide 10.3. Rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+3}}{3^k}$$

puhul

$$\begin{aligned} d &= \lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k+4}3^k}{3^{k+1}\sqrt{k+3}} = \frac{1}{3}\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{k+4}}{\sqrt{k+3}} \\ &= \frac{1}{3}\lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{k+4}{k+3}} = \frac{1}{3}\sqrt{\lim_{k\to\infty}\frac{k+4}{k+3}} = \frac{1}{3}\sqrt{1} = \frac{1}{3} < 1. \end{aligned}$$

D'Alemberti koonduvustunnuse põhjal on rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+3}}{3^k}$ koonduv.

Näide 10.4. Rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^k}{k!}$$

hajub, sest

$$\begin{aligned} d &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-(k+1))^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{(-k)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\frac{k!}{(k+1)!} \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^k}{k^k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e > 1. \end{aligned}$$

10.2 Leibnizi koonduvustunnus

Järgmine ***Leibnizi tunnus*** kirjeldab vahelduvate märkidega rea koonduvust.

Lause 10.3 *Rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ *koondub, kui jada* (a_k) *koondub nulliks monotoonselt.*

Tõestus. Eeldame, et jada (a_k) koondub kahanedes nulliks (kirjutame $a_k\downarrow 0$), juhul $a_k\uparrow 0$ on tõestus analoogiline. Seejuures võime eeldada, et $a_k\neq 0$ iga $k\in\mathbb{N}$ korral: kui mingi k_0 puhul $a_{k_0}=0$, siis monotoonsuse-eelduse tõttu $a_k=0$ kõikide $k\geq k_0$ korral, sel juhul on vaadeldav rida koonduv (selgitada!)✠.

Tähistame suvalise $m\in\mathbb{N}$ puhul

$$A_m := s_{2m-1}=\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^k a_k \text{ ja } B_m := s_{2m}=\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k a_k,$$

seega rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ osasummade jada (s_n) on esitatud kujul

$$(A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \ldots).$$

Seejuures iga $m\in\mathbb{N}$ puhul

$$A_{m+1}=s_{2m+1}=s_{2m-1}+a_{2m}-a_{2m+1}>s_{2m-1}=A_m$$

(peame silmas, et $a_{2m}-a_{2m+1}\geq 0$),

$$B_{m+1}=s_{2m+2}=s_{2m}-a_{2m+1}+a_{2m+2}<s_{2m}=B_m$$

(siin $-a_{2m+1}+a_{2m+2}\leq 0$) ja

$$B_m=s_{2m}=s_{2m-1}+a_{2m}>s_{2m-1}=A_m.$$

Näeme, et
1) jada (A_m) on kasvav,
2) jada (B_m) on kahanev ja
3) jada (B_m) iga liige on suurem jada (A_m) suvalisest liikmest.
Niisiis,

$$A_1\leq A_2\leq\cdots\leq A_m<B_m\leq\cdots\leq B_2\leq B_1 \text{ iga } m\in\mathbb{N} \text{ korral.}$$

Seega on mõlemad jadad (A_m) ning (B_m) tõkestatud ning monotoonsed, lause 9.1 põhjal on nad koonduvad, s.t. eksisteerivad lõplikud piirväärtused $\lim\limits_{m\to\infty}A_m$ ja $\lim\limits_{m\to\infty}B_m$. Kuna

$$\lim_{m\to\infty}(B_m-A_m)=\lim_{m\to\infty}(s_{2m}-s_{2m-1})=\lim_{m\to\infty}a_{2m}=0,$$

siis

$$\lim_{m\to\infty}B_m=\lim_{m\to\infty}(B_m-A_m+A_m)=\lim_{m\to\infty}(B_m-A_m)+\lim_{m\to\infty}A_m=\lim_{m\to\infty}A_m=: s.$$

Jääb üle veenduda, et $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, vastavalt jada koonduvuse definitsioonile leiame sellised indeksid N_1 ja N_2, et

$$|s_{2m-1} - s| < \varepsilon, \text{ kui } m \geq N_1, \tag{10.1}$$

ja

$$|s_{2m} - s| < \varepsilon, \text{ kui } m \geq N_2. \tag{10.2}$$

Tähistame $N := \max\{2N_1, 2N_2\}$, olgu $n \geq N$. Kui n on paaritu arv, s.t. $n = 2m - 1$ mingi $m \in \mathbb{N}$ puhul, siis $2m - 1 \geq 2N_1$, seega $m > N_1$ ning tingimuse (10.1) põhjal $|s_n - s| < \varepsilon$. Kui $n = 2m$ mingi $m \in \mathbb{N}$ puhul, siis $2m \geq 2N_2$, seega $m \geq N_2$ ja seose (10.2) kohaselt $|s_n - s| < \varepsilon$. Kokkuvõttes

$$n \geq N \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon,$$

s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Sellega on väide tõestatud. ■

Näide 10.5 (tähtis!). Eelpool veendusime, et harmooniline rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ hajub, kui $\alpha \leq 1$. Vaatleme nüüd vahelduvate märkidega rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha},$$

kus $\alpha > 0$. Tähistame

$$a_k := \frac{1}{k^\alpha},$$

siis

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^\alpha} < \frac{1}{k^\alpha} = a_k \text{ ja } \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0,$$

s.t. $a_k \downarrow 0$. Leibnizi tunnuse kohaselt on rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ koonduv iga $\alpha > 0$ korral.

Niisiis, juhul $0 < \alpha \leq 1$ rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ koondub, kuid rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k^\alpha}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ hajub. Saime ***näite koonduvast reast, mis ei ole absoluutselt koonduv***.

10.3 Astmerida, tema koonduvuspiirkond

Astmerida. Teatavasti koondub geomeetriline rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ absoluutselt iga $x \in (-1, 1)$ korral ning hajub kõigi ülejäänud arvude x puhul (vrd. lause 9.4). Iga $x \in (-1, 1)$ puhul on rea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ summaks arv $\frac{1}{1-x}$, seega on geomeetrilise rea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ summaks vahemikus $(-1, 1)$ funktsioon

$$s\colon\ (-1, 1) \to \mathbb{R},\ \ s(x) := \frac{1}{1-x}.$$

Definitsioon. Olgu $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ mingi arvjada. *Astmereaks* nimetatakse rida kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{10.3}$$

või, üldisemalt,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \tag{10.4}$$

kus $a \in \mathbb{R}$ on fikseeritud. Arve a_k nimetatakse astmerea *kordajateks.*

Muutujavahetusega $z := x - a$ saame rea (10.4) esitada kujul $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, s.t. kujul (10.3), seetõttu piirdume järgnevas astmerea koonduvuse ja tema summa omaduste kirjeldamisel põhiliselt kujul (10.3) esitatud ridadega.

Ilmselt on geomeetrilise rea puhul tegemist astmereaga kujul (10.3), kus $a_k = 1$ kõikide $k \in \mathbb{N}_0$ korral. Vaatleme veel näiteid astmeridadest.

Näide 10.6. Rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$$

on astmerida kordajatega $a_k = \frac{1}{2^k}$.

Näide 10.7. Rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(x^2\right)^k$$

on samuti astmerida. Et selles veenduda, kirjutame

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \left(x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} &= 1 + x^2 + x^4 + \dots \\ &= 1 + 0x + 1x^2 + 0x^3 + 1x^4 + 0x^5 + \dots,\end{aligned}$$

seega on vaadeldav rida esitatav kujul (10.3), kus kordajad a_k moodustavad jada

$$(1, 0, 1, 0, \dots).$$

Näide 10.8. Rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{x}\right)^k = 1 + x^{\frac{1}{2}} + x + x^{\frac{3}{2}} + x^2 + x^{\frac{5}{2}} + \dots$$

ei ole astmerida.

Astmerea koonduvuspiirkond. Definitsioon. Hulka

$$X := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{rida } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ koondub} \right\},$$

nimetatakse astmerea (10.3) *koonduvuspiirkonnaks* ja hulka

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{rida } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ koondub absoluutselt} \right\}$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{rida } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \, |x|^k \text{ koondub} \right\}$$

selle astmerea *absoluutse koonduvuse piirkonnaks*. Funktsiooni

$$s : X \to \mathbb{R}, \ \ s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \left(= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)$$

nimetatakse astmerea (10.3) *summaks*.

On selge, et $0 \in A \subset X$, seega ei ole kumbki hulkadest X ja A tühi.

Astmerea koonduvus- ja absoluutse koonduvuse piirkonna määramiseks rakendame Cauchy koonduvustunnust (vt. lause 10.1). Seda astmereale $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ rakendades saame järgmise väite:
(*) *kui* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k| \, |x^k|} < 1$, *siis rida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *koondub absoluutselt; kui* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k| \, |x^k|} > 1$, *siis rida hajub.*

Olgu $\rho := \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, astmerea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *koonduvusraadius* r defineeritakse seosega

$$r := \begin{cases} 0, & \text{kui } \rho = \infty, \\ \frac{1}{\rho}, & \text{kui } 0 < \rho < \infty, \\ \infty, & \text{kui } \rho = 0. \end{cases}$$

Intervalli $(-r, r)$ nimetatakse vaadeldava astmerea *koonduvusvahemikuks.*

Teoreem 10.4 *(**Cauchy-Hadamardi teoreem**).* (a) *Juhul* $r = 0$ *koondub astmerida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *vaid punktis* $x = 0$, *s.t.* $A = X = \{0\}$.
(b) *Kui* $0 < r < \infty$, *siis astmerida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *koondub absoluutselt vahemikus* $(-r, r)$ *ja hajub hulgas* $(-\infty, -r) \cup (r, \infty)$, *s.t.*

$$(-r, r) \subset A \subset X \subset [-r, r].$$

(c) *Kui* $r = \infty$, *siis astmerida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *koondub absoluutselt igas punktis* $x \in \mathbb{R}$, *s.t.* $A = X = \mathbb{R}$.

Tõestus. (a) Kui $r = 0$, siis iga $x \neq 0$ puhul

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,|x^k|} = |x| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty,$$

seega astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hajub. Niisiis, juhul $r = 0$ koondub astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ainult punktis $x = 0$, s.t. $X = A = \{0\}$.

(b) Juhul $0 < r < \infty$ saame, et

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,|x^k|} = |x| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \rho\,|x| = \frac{|x|}{r} \text{ iga } x \in \mathbb{R} \text{ korral}$$

ning väite (*) kohaselt koondub astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absoluutselt, kui $|x| < r$, ja hajub, kui $|x| > r$.

(c) Kui $r = \infty$, siis $\rho = 0$ ning

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,|x^k|} = |x| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0,$$

väite (*) põhjal rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koondub absoluutselt iga $x \in \mathbb{R}$ korral, s.t. $X = A = \mathbb{R}$. ■

Cauchy-Hadamardi teoreem ei väida midagi astmerea koonduvuse kohta koonduvusvahemiku $(-r, r)$ otspunktides $-r$ ja r, kui $0 < r < \infty$. Et saada ettekujutust sellekohastest võimalikest situatsioonidest, analüüsime lisaks eelpool vaadeldud geomeetrilise rea juhule, kus $X = A = (-1, 1)$, järgmisi näiteid.

Näide 10.9. Astmerea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

korral

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$$

(vt. lause 2.9). Seega koondub vaadeldav astmerida absoluutselt vahemikus $(-1, 1)$ ja hajub intervallides $(-\infty, 1)$ ning $(1, \infty)$. Juhul $x = -1$ saame harmoonilise arvrea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, mis koondub, kuid ei koondu absoluutselt (vt. näide 10.5), samas on juhul $x = 1$ saadud arvrida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajuv. Kokkuvõttes

$$X = [-1, 1) \quad \text{ja} \quad A = (-1, 1)\,.$$

Näide 10.10. Astmerea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

korral

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^2} = \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{k}\right)^2 = \left(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\right)^2 = 1.$$

Paneme tähele, et mõlemad arvread

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \text{ ja } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

koonduvad absoluutselt, seega antud astmerea puhul

$$X = A = [-1, 1].$$

Astmerea summa diferentseeruvus. Olgu $r > 0$ astmerea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koonduvusraadius ja

$$s\colon (-r, r) \to \mathbb{R}, \quad s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

selle rea summa. Esitame ilma tõestuseta funktsiooni $s\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$ järgmise tähtsa omaduse.

Teoreem 10.5 *Astmerea* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *summa* $s\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$ *on diferentseeruv funktsioon. Astmerida võib igas punktis* $x \in (-r, r)$ *liikmeti diferentseerida, seejuures*

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \tag{10.5}$$

ja astmerea (10.5) *koonduvusraadius on* r.

Kuna diferentseeruv funktsioon on pidev (vt. lause 5.1), siis tuleneb teoreemist 10.5 järgmine oluline järeldus.

Järeldus 10.6 *Astmerea* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *summa* $s\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$ *on pidev funktsioon.*

Näide 10.11. Kui astmerida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

liikmeti diferentseerida, saame geomeetrilise rea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$. Mõlema astmerea koonduvusraadius on 1. Vastavalt teoreemile 10.5 on astmerea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ summa s tuletiseks geomeetrilise rea summa, s.t.

$$s'(x) = \frac{1}{1-x} \text{ iga } x \in (-1, 1) \text{ korral.}$$

Nagu eelpool märgitud, üldisest astmereast

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

saame muutujavahetusega $z := x - a$ seni vaadeldud tüüpi astmerea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Neil kahel real on sama koonduvusraadius, kui selleks on r, siis üldise astmerea (10.4) koonduvusvahemik on $(a-r, a+r)$. Selles vahemikus on ta absoluutselt koonduv, tema summa

$$s\colon\ (a-r, a+r) \to \mathbb{R},\ \ s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

on teoreemi 10.5 põhjal diferentseeruv (seega pidev) funktsioon ning kehtib valem

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}. \tag{10.6}$$

10.4 Funktsiooni Taylori rida

Eeldame, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on punkti $a \in D$ mingis ümbruses $(a-d, a+d)$ esitatav astmera $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ summana, s.t.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \text{ iga } x \in (a-d, a+d) \text{ korral.}$$

Siis $d \leq r$, kus r on astmerea koonduvusraadius, eelneva arutelu kohaselt on f vahemikus $(a-d, a+d)$ diferentseeruv ning

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}.$$

Seejuures on viimase astmerea koonduvusraadiuseks samuti r, seega, kui rakendada talle teoreemi 10.5, saame seose

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x-a)^{k-2}, \text{ kus } x \in (a-d, a+d).$$

Tulemuseks on astmerida koonduvusraadiusega r, vahemikus $(a-d, a+d)$ võime teda teoreemi 10.5 põhjal liikmeti diferentseerida, jne. Üldiselt, $f\colon\ (a-d, a+d) \to \mathbb{R}$ on lõpmata palju kordi diferentseeruv, suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral avaldub funktsiooni n-ndat järku tuletis kujul

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1) a_k (x-a)^{k-n}.$$

Siit saame valemi $f^{(n)}(a) = n! a_n$ ehk

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ iga } n \in \mathbb{N}_0 \text{ puhul.} \tag{10.7}$$

Niisiis, *kui lõpmata palju kordi diferentseeruv funktsioon* $f\colon\ (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ *on esitatud vahemikus* $(a-d, a+d)$ *astmerea* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ *summana, siis selle astmerea kordajad on kujul* (10.7). Seda astmerida nimetatakse funktsiooni f *Taylori reaks* kohal a.

Kordajad (10.7) on meile tuttavad Taylori valemist (vt. alapunkt 6.3), kus avaldist

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nimetatakse funktsiooni f n-astme Taylori polünoomiks punktis a.

Igal funktsioonil f, mis on mingis intervallis $(a-d, a+d)$, kus $d>0$ või $d=\infty$ (sel juhul $(a-d, a+d)=\mathbb{R}$), lõpmata palju kordi diferentseeruv, on Taylori rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. Seejuures Taylori teoreemi 6.7 kohaselt kehtib valem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(a,x), \text{ kus } x \in (a-d, a+d), \tag{10.8}$$

ja jääkliikme $R_{n+1}(x)$ võib esitada nn. Lagrange'i kujul

$$R_{n+1}(a,x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_{n+1}(x))(x-a)^{n+1}, \text{ kus } c_{n+1}(x) \text{ on punkt arvude } a \text{ ja } x \text{ vahel.} \tag{10.9}$$

Siit tuleneb järgmine väide.

Lause 10.7 *Funktsiooni f Taylori rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ koondub hulgas $(a-d, a+d)$ summaks f parajasti siis, kui*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1}(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0 \textit{ iga } x \in (a-d, a+d) \textit{ korral.}$$

10.5 Funktsioonide arendamine astmereaks

Esitame mõnede elementaarfunktsioonide reaksarendused.

Näide 10.12. Leiame eksponentfunktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := e^x$$

Taylori rea kohal $a=0$. Valemite (10.8) ja (10.9) kohaselt

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{c_{n+1}(x)}}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{c_{n+1}(x)} \end{aligned} \tag{10.10}$$

(vrd. näide 6.8), kus $c_{n+1}(x)$ on mingi arv punktide 0 ja x vahel. Jääkliikme

$$R_{n+1}(0,x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{c_{n+1}(x)}$$

hindamiseks paneme tähele, et kui $b > 0$, siis

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{c_{n+1}(x)}\right| \leq \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}e^b \text{ suvalise } \ x \in (-b, b) \ \text{ puhul.}$$

Olgu $x \in \mathbb{R}$ suvaline ja olgu $b > 0$ selline arv, et $|x| < b$. Kasutades seost

$$\lim_{m\to\infty} \frac{b^m}{m!} = 0 \text{ iga } b \geq 0 \text{ korral}$$

(selle tõestuse jätame siinkohal vahele), saame, et

$$\lim_{n\to\infty} |R_{n+1}(0,x)| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{c_{n+1}(x)}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}e^b = 0 \text{ iga } x \in \mathbb{R} \text{ korral,}$$

seega $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(0,x) = 0$ ja valemi (10.10) põhjal

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ \textbf{\textit{iga}} \ x \in \mathbb{R} \ \textbf{\textit{korral.}}$$

Näide 10.13. Vaatleme logaritmfunktsiooni

$$f\colon\ (-1,\infty) \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := \ln(1+x).$$

Kui $-1 < x < 1$, siis geomeetrilise rea summa valemi kohaselt

$$\begin{aligned}(\ln(1+x))' &= \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}\right)'\end{aligned}$$

(selgitada!)✠. Seejuures rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ koondub vahemikus $(-1,1)$ ja tema summa üheks algfunktsiooniks on astmerea

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \tag{10.11}$$

summa (põhjendada!)✠, tähistame selle sümboliga $F(x)$. Niisiis, $\ln(1+x) = F(x) + C$, kus C on suvaline konstant. Võttes viimases võrduses $x = 0$, saame, et $C = 0$, seega kehtib võrdus $\ln(1+x) = F(x)$ ehk

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \text{ kui } -1 < x < 1.$$

Näide 10.14. Siinusfunktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = \sin x$$

tuletised avalduvad valemiga

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}(-1)^{n/2}\sin x, & \text{kui } n=2i,\\ (-1)^{(n-1)/2}\cos x, & \text{kui } n=2i-1,\end{cases}$$

seega

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & \text{kui } n=2i,\\ (-1)^{(n-1)/2}, & \text{kui } n=2i-1\end{cases}\quad (i\in\mathbb{N}).$$

Valemi (10.8) kohaselt

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}+R_{2i+1}(0,x)\ \text{ suvalise } x\in\mathbb{R} \text{ puhul,}$$

seejuures

$$|R_{n+1}(0,x)|=\frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(c_{n+1}(x))\right||x|^{n+1}\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0,\ \text{kui } n\to\infty.$$

Niisiis, $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n+1}(0,x)=0$ ning

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\ \text{ iga } x\in\mathbb{R} \text{ korral.}$$

Analoogiliselt saadakse, et

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!},\ \text{kus } x\in\mathbb{R}.$$

Kokkuvõte

Eelmises peatükis tõestatud ridade võrdluslause abil saadakse vaadeldavat rida geomeetrilise reaga võrreldes kaks lihtsat, kuid samas olulist koonduvustunnust:
1) Cauchy tunnus: kui $c:=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|u_k|}<1$, siis rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ koondub absoluutselt, juhul $c>1$ see rida hajub,
2) D'Alembert'i tunnus: kui $d:=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}<1$, siis rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ koondub absoluutselt, juhul $d>1$ see rida hajub.
Tähelepanuväärne on Leibnizi tunnus vahelduvate märkidega rea koonduvuseks: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ koondub, kui $a_k\to 0$ monotoonselt. Selle väite kohaselt rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ koondub, kuid ei koondu absoluutselt, sest rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ hajub. Niisiis, iga koonduva rida ei ole absoluutselt koonduv.

Astmereaks nimetatakse rida kujul $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$. Osutub, et see rida koondub absoluutselt iga $x\in(a-r,a+r)$ korral ja hajub kõikide nende x korral, mis rahuldavad tingimust

$x < -r$ ja $x > r$, kus astmerea koonduvusraadius $r \geq 0$ leitakse Cauchy koonduvustunnuse abil. Nii saab defineerida funktsiooni $s : (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$, $s(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ (astmerea summa), see osutub vahemikus $(a-r, a+r)$ lõpmata palju kordi diferentseeruvaks, seejuures kehtib seos $a_k = \frac{s^{(k)}(a)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$.

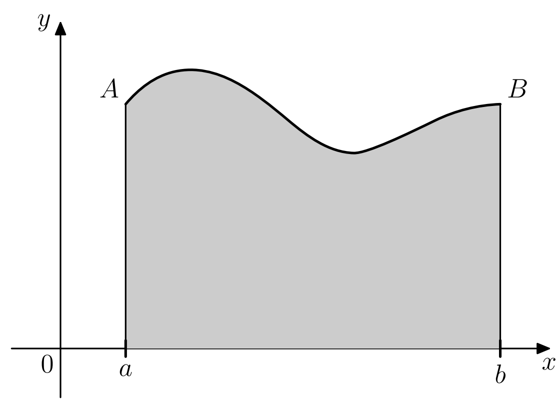
Kui funktsioon $f : (a-d, a+d) \to \mathbb{R}$ on lõpmata palju kordi diferentseeruv, siis astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ nimetatakse funktsiooni f Taylori reaks punktis a. See rida koondub summaks f vahemikus $(a-d, a+d)$ parajasti siis, kui funktsiooni f Taylori valemi jääkliige $R_{n+1}(a,x)$ (vrd. pt. 6) rahuldab tingimust $R_{n+1}(a,x) \to 0$ iga $x \in (a-d, a+d)$ korral protsessis $n \to \infty$.

11 Integreeruvad funktsioonid

Selles peatükis jõuame integraali mõiste juurde. Lähtekohaks on küsimus kõvertrapetsi pindalast ning selle arvutamisest.

11.1 Kõvertrapetsi pindala

Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ selline pidev funktsioon, et $f(x) \geq 0$ kõikide $x \in [a,b]$ korral, olgu kõver AB selle funktsiooni graafik xy-tasandil. Vaatleme xy-tasandil kujundit $aABb$, mille määravad kõver AB ning sirged $y = 0$ (s.o. x-telg), $x = a$ ja $x = b$ (vt. joonis 11.1). Sellist ku-



Joonis 11.1: Funktsiooniga $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ määratud kõvertrapets.

jundit nimetatakse *kõvertrapetsiks*. ***Kuidas defineerida niisuguse kõvertrapetsi pindala ja kuidas seda arvutada?***

Olgu n mingi naturaalarv. Jagame lõigu $[a,b]$ suvalisel viisil n osaks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

edaspidi nimetame sellist jaotust *lõigu* $[a,b]$ *alajaotuseks* ja märgime $T[x_0,\ldots,x_n]$ või lühidalt T. Kõigi selliste alajaotuste hulka tähistame edaspidi gooti tähega $\mathfrak{T}$, vajaduse korral täpsemalt $\mathfrak{T}_{[a,b]}$. Alajaotuse $T[x_0,\ldots,x_n] \in \mathfrak{T}$ korral saame lõigus $[a,b]$ n osalõiku

$$[a,x_1]\,, [x_1,x_2]\,, \ldots, [x_{n-1},b]\,,$$

seejuures on k-nda osalõigu pikkuseks

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}.$$

Suurima osalõigu pikkust nimetame alajaotuse T *diameetriks*, seda tähistame sümboliga $\lambda(T)$, s.t.

$$\lambda(T) := \max\{\Delta x_k \mid k = 1,\ldots,n\}\,.$$

Kuna funktsioon f on pidev lõigus $[a,b]$, siis on ta pidev igas osalõigus $[x_{k-1},x_k]$, seega Weierstrassi teise teoreemi kohaselt on tal igas osalõigus suurim ja vähim väärtus (vt. teoreem 4.6). Tähistame kõikide $k = 1,\ldots,n$ puhul

$$m_k := \min\{f(x) \mid x \in [x_{k-1},x_k]\} \quad \text{ja} \quad M_k := \max\{f(x) \mid x \in [x_{k-1},x_k]\}$$

ning ehitame igale osalõigule $[x_{k-1}, x_k]$ ristküliku kõrgusega M_k, selle pindala on $M_k \Delta x_k$. Neist ristkülikutest moodustub xy-tasandil *ristküliksumma*, tähistame selle kujundi sümboliga $P^*(T)$. Lihtne on näha, et ristküliksumma $P^*(T)$ ***sisaldab kõvertrapetsit*** $aABb$, tema pindala on

$$S(T) := \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k.$$

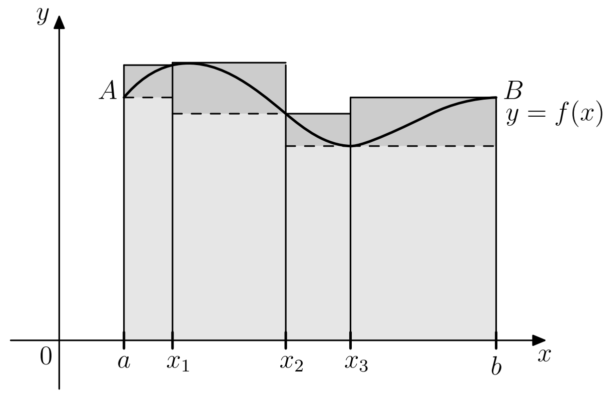
Igale alusele $[x_{k-1}, x_k]$ ehitame veel ristküliku kõrgusega m_k, need ristkülikud moodustavad teise ristküliksumma $P_*(T)$ pindalaga

$$s(T) := \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k,$$

seejuures $P_*(T)$ ***sisaldub kõvertrapetsis*** $aABb$. Niisiis,

$$P_*(T) \subset aABb \subset P^*(T) \tag{11.1}$$

(vt. joonis 11.2). Siit tuleneb, et suvalise kahe alajaotuse $T, T' \in \mathfrak{T}$ puhul $P_*(T') \subset P^*(T)$, järelikult kehtib võrratus $s(T') \leq S(T)$. Seega on iga arv $S(T)$ hulga $\{s(T') \mid T' \in \mathfrak{T}\}$



Joonis 11.2: Kõvertrapets ja ristküliksummad.

ülemiseks tõkkeks, pidevuse aksioomi põhjal eksisteerib sellel hulgal ülemine raja, tähistame selle tähega $\mathcal{S}_*$. Kuna $\mathcal{S}_*$ on hulga $\{s(T') \mid T' \in \mathfrak{T}\}$ vähim ülemine tõke, siis $\mathcal{S}_* \leq S(T)$ kõikide $T \in \mathfrak{T}$ korral, s.t. $\mathcal{S}_*$ on hulga $\{S(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$ alumine tõke. Järelikult leidub sel hulgal alumine raja $\mathcal{S}^* \geq \mathcal{S}_*$. See asjaolu ning seosed (11.1) on aluseks järgmisele mõttekäigule: kui

$$\sup\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\} = \inf\{S(T) \mid T \in \mathfrak{T}\} =: \mathcal{S},$$

siis seda arvu $\mathcal{S}$ oleks loomulik nimetada kõvertrapetsi $aABb$ pindalaks.

Küsimus sellest, kas võrdus $\mathcal{S}_* = \mathcal{S}^*$ antud eeldustel tõepoolest kehtib, jääb esialgu lahtiseks.

11.2 Tõkestatud funktsiooni Darboux' integraal

Funktsiooni Darboux' alam- ja ülemsummad. Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ***tõkestatud*** funktsioon, s.t. tema väärtuste hulk $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ on nii alt kui ka ülalt tõkestatud. Vastavalt pidevuse aksioomile ja sellest tulenevale lausele 1.5 leiduvad

$$m := \inf \{f(x) \mid x \in [a,b]\} \quad \text{ja} \quad M := \sup \{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

Kui lõigus $[a,b]$ on määratud mingi alajaotus $T[x_0, ..., x_n]$, siis funktsioon on tõkestatud igas osalõigus $[x_{k-1}, x_k]$, seega eksisteerivad

$$m_k := \inf \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad \text{ja} \quad M_k := \sup \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

iga $k = 1, ..., n$ puhul. (Rõhutame, et kuna me ei eelda funktsiooni f pidevust, siis ei ole meil alust väita, et m_k ja M_k on funktsiooni väärtused ehk miinimum ja maksimum nagu eelmises alapunktis vaadeldud situatsioonis.) Tähistame (samuti kui eelmises alapunktis)

$$s(T) := \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \quad \text{ja} \quad S(T) := \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k,$$

neid nimetatakse funktsiooni f (alajaotusele $T \in \mathfrak{T}$ vastavaks) *Darboux' alam- ja ülemsummaks*. Kuna $m \leq m_k \leq M_k \leq M$ ja $b - a \geq \Delta x_k > 0$ iga $k = 1, \ldots, n$ korral, siis

$$m(b-a) \leq s(T) \leq S(T) \leq M(b-a) \tag{11.2}$$

suvalise $T \in \mathfrak{T}$ puhul (selgitada!)✠.

Darboux' summade geomeetriline tähendus on selge: pideva mittenegatiivse funktsiooni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ puhul (märgime, et Weierstrassi esimese teoreemi 4.5 kohaselt on f sel juhul tõkestatud), on tegemist selle funktsiooni graafiku AB ning sirgetega $x = a$, $x = b$ ja $y = 0$ määratud kõvertrapetsi $aABb$ sisse ja ümber ehitatud ristküliksummade pindaladega alajaotuse T korral (vrd. alapunkt 11.1).

Järgnevalt esitame kaks **Darboux' summade omadust**.

Lause 11.1 *Alajaotuse peenendamisel (s.o. jaotuspunktide lisamisel) ei saa Darboux' ülemsumma kasvada ega alamsumma kahaneda.*

Tõestus. Olgu $S(T)$ alajaotusele $T[x_0, \ldots, x_n]$ vastav Darboux' ülemsumma. Lisame sellele jaotusele ühe uue jaotuspunkti x', see paikneb mingi kahe olemasoleva jaotuspunkti x_{i-1} ja x_i vahel. Uuele alajaotusele $T'[x_0, \ldots, x_{i-1}, x', x_i, \ldots, x_n]$ vastav ülemsumma $S(T')$ on kujul

$$S(T') = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} M_k \Delta x_k + M_i^1 (x' - x_{i-1}) + M_i^2 (x_i - x'),$$

kus $M_i^1 := \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x']} f(x)$ ja $M_i^2 := \sup\limits_{x \in [x', x_i]} f(x)$. Kuna $M_i^1, M_i^2 \leq M_i$ (selgitada!)✠, siis

$$M_i^1 (x' - x_{i-1}) \leq M_i (x' - x_{i-1}) \text{ ning } M_i^2 (x_i - x') \leq M_i (x_i - x'),$$

mistõttu

$$\begin{aligned} S(T') &\leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_k\Delta_k + M_i(x' - x_{i-1}) + M_i(x_i - x') \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_k\Delta_k + M_i\Delta x_i = S(T). \end{aligned}$$

Analoogiliselt saab näidata (veenduda!)✠, et

$$s(T') = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} m_k\Delta_k + m_i^1(x' - x_i) + m_i^2(x_{i+1} - x') \geq s(T),$$

kus $m_i^1 := \inf\limits_{x\in[x_i,x']} f(x)$ ja $m_i^2 := \inf\limits_{x\in[x',x_{i+1}]} f(x)$. ■

Lause 11.2 *Ükski alamsumma ei ole suurem ühestki ülemsummast, s.t. suvaliste* $T, T' \in \mathfrak{T}$ *korral*

$$s(T') \leq S(T).$$

Tõestus. Olgu T ja T' lõigu $[a,b]$ kaks suvalist alajaotust, moodustame kolmanda alajaotuse T'' nii, et selle jaotuspunktideks on parajasti kõik jaotustesse T ja T' kuuluvad jaotuspunktid. Siis T'' on peenem mõlemast alajaotustest T ja T', mistõttu omadusest 11.1 saame võrratused

$$s(T') \leq s(T'') \leq S(T'') \leq S(T).$$

Lause on tõestatud. ■

Darboux' integraal. Lausest 11.2 järeldub, et ***iga*** ülemsumma $S(T)$ on kõigi alamsummade hulga

$$\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$$

ülemine tõke. Pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib

$$\sup\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\} =: I_*(f),$$

arvu $I_*(f)$ nimetatakse funktsiooni f *Darboux' alamintegraaliks.* Kuna arv $I_*(f)$ on hulga $\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$ *vähim* ülemine tõke, siis $I_*(f) \leq S(T)$ suvalise alajaotuse $T \in \mathfrak{T}$ korral. Niisiis, $I_*(f)$ on hulga $\{S(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$ alumine tõke. Seega on see hulk alt tõkestatud, mistõttu tal leidub alumine raja

$$I^*(f) := \inf\{S(T) \mid T \in \mathfrak{T}\},$$

seda nimetatakse funktsiooni f *Darboux' ülemintegraaliks.* Alumine raja kui *suurim* alumine tõke ei saa olla väiksem alumisest tõkkest $I_*(f)$, järelikult $I_*(f) \leq I^*(f)$.

Eelpooltoodud seoseid (11.2) täpsustades saame, et ***lõigu*** $[a,b]$ ***suvalise alajaotuse*** $T \in \mathfrak{T}$ ***puhul kehtivad võrratused***

$$m(b-a) \leq s(T) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(T) \leq M(b-a). \tag{11.3}$$

Definitsioon. Öeldakse, et lõigus $[a,b]$ tõkestatud funktsioon f on selles lõigus *integreeruv*, kui tema Darboux' alam- ja ülemintegraal on võrdsed, s.t. $I_*(f) = I^*(f)$. Alam- ja ülemintegraali ühist väärtust $I(f)$ nimetatakse funktsiooni f *Darboux' integraaliks lõigus* $[a,b]$.

Teoreem 11.3 *Tõkestatud funktsioon* $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *on lõigus* $[a,b]$ *integreeruv parajasti siis, kui iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub selline alajaotus* $T_0 \in \mathfrak{T}$ *, et*

$$S(T_0) - s(T_0) < \varepsilon.$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et f on integreeruv, olgu $\varepsilon > 0$. Kuna

$$I(f) = I_*(f) = \sup\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\},$$

siis supreemumi definitsiooni kohaselt (vrd. lause 1.2) saab valida sellise $T_1 \in \mathfrak{T}$, et

$$s(T_1) > I(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analoogiliselt saame seose

$$I(f) = I^*(f) = \inf\{S(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$$

põhjal infiimumi definitsiooni silmas pidades (vrd. lause 1.3) valida $T_2 \in \mathfrak{T}$ omadusega

$$S(T_2) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Moodustame uue alajaotuse T_0 nii, et ta sisaldab mõlema alajaotuse T_1 ja T_2 jaotuspunktid, seega on T_0 peenem nii jaotusest T_1 kui ka jaotusest T_2. Seetõttu lause 11.1 kohaselt

$$s(T_0) \geq s(T_1) > I(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$S(T_0) \leq S(T_2) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nende seoste põhjal

$$S(T_0) - s(T_0) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2} - I(f) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Piisavus. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaliselt fikseeritud. Eelduse kohaselt leidub alajaotus $T_0 \in \mathfrak{T}$ omadusega $S(T_0) - s(T_0) < \varepsilon$. Seostest (11.3) tuleneb, et

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S(T_0) - s(T_0) < \varepsilon$$

(selgitada!)✠. Niisiis on vahe $I^*(f) - I_*(f)$ mittenegatiivne arv, mis on väiksem igast positiivsest arvust ε, seega $I^*(f) = I_*(f)$, mis tähendab, et f on integreeruv. ■

Näide 11.1. Iga lõigus konstantne funktsioon on selles lõigus integreeruv. Tõepoolest, funktsiooni

$$f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R},\quad f(x) := c \tag{11.4}$$

puhul kehtivad *suvalise* alajaotuse $T = T[x_0, \dots, x_n]$ korral seosed

$$s(T) = S(T) = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c(b-a)$$

(selgitada!)✠, mistõttu

$$I_*(f) = I^*(f) = c(b-a),$$

niisiis $I(f) = c(b-a)$.

Paneme tähele, et konstantse funktsiooni (11.4) graafikuga määratud kõvertrapets on ristkülik alusega $[a, b]$ ja kõrgusega c. Tähendab, integraali väärtuseks on sel juhul kõvertrapetsi pindala.

Järgnevas näites kasutame eespool esitatud teoreeme 1.9 ja 1.10 ratsionaalarvude hulga $\mathbb{Q}$ ja irratsionaalarvude hulga $\mathbb{R}\diagdown\mathbb{Q}$ tihedusest hulgas $\mathbb{R}$: kui $c, d \in \mathbb{R}$ ja $c < d$, siis leiduvad $r \in \mathbb{Q}$ ning $\rho \in \mathbb{R}\diagdown\mathbb{Q}$, et $c < r < d$ ja $c < \rho < d$.

Näide 11.2. Vaatleme Dirichlet' funktsiooni

$$f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R},\ \ f(x) := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalarv,} \\ 0, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalarv.} \end{cases}$$

Suvalise alajaotuse $T[x_0, \dots, x_n] \in \mathfrak{T}_{[0,1]}$ puhul sisaldab iga osalõik $[x_{k-1}, x_k]$ eelpoolmainitud teoreemide 1.9 ja 1.10 põhjal nii ratsionaal- kui ka irratsionaalarve (selgitada!)✠. Seetõttu $M_k = 1$ ja $m_k = 0$ iga $k = 1, \dots, n$ korral (selgitada!)✠. Järelikult

$$s(T) = \sum_{k=1}^{n} 0\Delta x_k = 0 \ \text{ ja } \ S(T) = \sum_{k=1}^{n} 1\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1,$$

seega

$$S(T) - s(T) = 1 \text{ iga } T \in \mathfrak{T}_{[0,1]} \text{ puhul.}$$

Teoreemi 11.3 põhjal ei ole funktsioon f integreeruv.

Niisiis, ***leidub selliseid tõkestatud funktsioone, mis ei ole integreeruvad.***

11.3 Tõkestatud funktsiooni Riemanni integraal

Riemanni integraalsumma. Olgu $f\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon ja olgu $T[x_0, \dots, x_n]$ lõigu $[a, b]$ mingi alajaotus. Fikseerime iga $k = 1, \dots, n$ korral ***täiesti suvaliselt*** punkti ξ_k osalõigust $[x_{k-1}, x_k]$ ning moodustame funktsiooni f alajaotusele T ning punktide komplektile $\xi := \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ vastava *integraalsumma*

$$\sigma(T, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Kuna

$$m_k \le f(\xi_k) \le M_k \text{ suvalise } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ ja } k = 1, \dots, n \text{ korral,}$$

siis

$$s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = S(T)$$

(selgitada!)✠, niisiis,

$$s\,(T) \leq \sigma\,(T, \xi) \leq S\,(T) \text{ iga } T \in \mathfrak{T} \text{ puhul,} \tag{11.5}$$

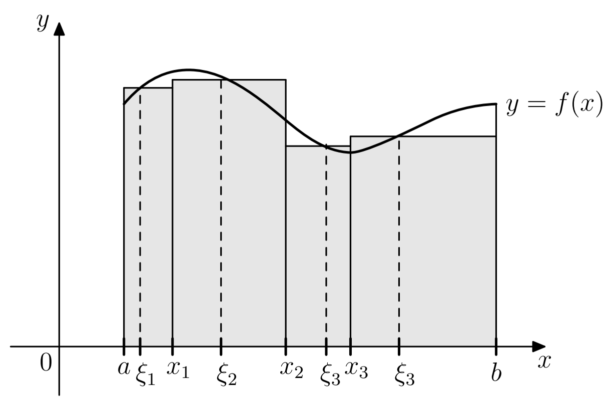
sõltumata sellest, kuidas valitakse punktide komplekt ξ iga konkreetse alajaotuse T puhul. Seejuures lause 1.6(b) põhjal

$$\inf_{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k],\ 1 \leq k \leq n} \sum_{k=1}^{n} f\,(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \inf_{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]} f\,(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = s\,(T)\,,$$

analoogiliselt (tänu lausele 1.6(a))

$$\sup_{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k],\ 1 \leq k \leq n} \sum_{k=1}^{n} f\,(\xi_k)\,\Delta x_k = S\,(T)\,.$$

Niisiis, antud alajaotuse $T = T\,[x_0, \ldots, x_n]$ puhul



Joonis 11.3: Riemanni integraalsummale vastav ristküliksumma.

$$s\,(T) = \inf \sigma\,(T, \xi) \text{ ja } S\,(T) = \sup \sigma\,(T, \xi)\,, \tag{11.6}$$

kui infiimum ja supreemum võetakse üle kõikvõimalike komplektide $\xi := \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, kus $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Märgime, et pideva mittenegatiivse funktsiooni $f\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}$ puhul saame antud alajaotuse $T\,[x_0, \ldots, x_n]$ ning suvaliselt valitud punktide komplekti $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ korral igale alusele $[x_{k-1}, x_k]$ ristküliku kõrgusega $f\,(\xi_k)$ (vt. joonis 11.3). Need ristkülikud moodustavad ristküliksumma, mis (nii nagu kõvertrapets $aABb$ (vrd. alapunkt 11.1)) paikneb ristküliksummade $P_*\,(T)$ ja $P^*\,(T)$ vahel, viimane asjaolu kajastub seoses (11.5).

Riemanni integraal. Definitsioon. Öeldakse, et tõkestatud funktsioon $f\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}$ on lõigus $[a, b]$ *Riemanni mõttes integreeruv*, kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma\,(T, \xi) =: I,$$

s.t.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \lambda(T) < \delta \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k - I\right| < \varepsilon \ \textit{\textbf{iga valiku}}\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\ \textit{\textbf{korral.}}$$

Arvu I nimetatakse sel juhul funktsiooni f *Riemanni integraaliks* lõigus $[a, b]$, seda tähistatakse $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Kursuses *Matemaatiline analüüs III* tõestatakse järgmine oluline teoreem, mis ütleb, et ***tegelikult langevad Darboux' integraali ja Riemanni integraali mõisted kokku.***

Teoreem 11.4 *Tõkestatud funktsioon* $f\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}$ *on Riemanni mõttes integreeruv parajasti siis, kui ta on Darboux' mõttes integreeruv. Seejuures* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I(f)$.

Märgime, et erinevalt Darboux' integraalist omab Riemanni integraali definitsioon mõtet ka sel juhul, kui funktsioon f ei ole lõigus $[a, b]$ tõkestatud. Kuid vahetu kontroll näitab, et ükski Riemanni mõttes integreeruv funktsioon ei saa olla tõkestamata. Niisiis, funktsiooni f tõkestatus on tema intgreeruvuse jaoks tarvilik (kuid mitte piisav, vrd. näide 11.2) tingimus. Seega on meil seoses intgreeruvusega põhjust vaadelda vaid tõkestatud funktsioone. Kuna seejuures ei ole teoreemi 11.4 põhjal vajadust eristada integreeruvust Darboux' ja Riemanni mõttes, siis kõneleme edaspidi lihtsalt *integreeruvusest* ja *integraalist.*

Integreeruvate funktsioonide täpsem kirjeldamine ei kuulu käesoleva kursuse eesmärkide hulka. Kindlasti tuleb aga rõhutada järgmist, integraalarvutuse üht kõige olulisemat teoreemi, ka selle väite tõestus antakse kursuses *Matemaatiline analüüs III.*

Teoreem 11.5 *Iga lõigus pidev funktsioon on selles lõigus integreeruv.*

Pidevus ei ole tarvilik tingimus integreeruvuseks, see selgub järgmisest väitest.

Lause 11.6 *Iga antud lõigus monotoonne tõkestatud funktsioon on integreeruv.*

Tõestus. Kui f on konstantne funktsioon, siis on ta integreeruv (vt. näide 11.1). Olgu f lõigus $[a, b]$ kasvav mittekonstantne tõkestatud funktsioon ja olgu $T[x_0, \ldots, x_n]$ selle lõigu mingi alajaotus. Sel juhul

$$m_k = f(x_{k-1}) \text{ ning } M_k = f(x_k) \text{ suvalise } k = 1, \ldots, n \text{ puhul}$$

(põhjendada!)✠.Olgu ε suvaline positiivne arv, võtame $\delta := \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Kui $T[x_0, \ldots, x_n]$ on valitud selliselt, et $\lambda(T) < \delta$, siis $\Delta x_k < \delta$ iga $k = 1, \ldots, n$ korral ning

$$\begin{aligned} S(T) - s(T) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,\Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\,\Delta x_k < \delta \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \delta\,(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(b) - f(x_{n-1})) \\ &= \delta\,(f(b) - f(a)) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\,(f(b) - f(a)) = \varepsilon, \end{aligned}$$

mis teoreemi 11.3 kohaselt tähendabki funktsiooni f integreeruvust lõigus $[a, b]$.

Kahaneva funktsiooni puhul on tõestus analoogiline. ■

Integraali geomeetrilise tähenduse selgitamiseks tuleme tagasi alapunktis 11.1 vaadeldud kõvertrapetsi pindala probleemi juurde. Kui eeldada, et funktsioon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on pidev ja mittenegatiivne, siis antud alajaotuse $T = T[x_0, \ldots, x_n] \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$ korral on Darboux' alamsumma $s(T)$ võrdne kõvertrapetsi $aABb$ sisse ehitatud ristküliksumma $P_*(T)$ pindalaga, ülemsumma $S(T)$ on kõvertrapetsi ümber ehitatud ristküliksumma $P^*(T)$ pindala. Teoreemi 11.5 kohaselt on funktsioon f lõigus $[a, b]$ integreeruv, s.t.

$$\sup\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\} = \inf\{S(T) \mid T \in \mathfrak{T}\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Seega on kõvertrapetsil $aABb$ pindala, arvuliselt võrdub see integraaliga $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Kokkuvõte

Kõvertrapetsi pindala probleem on – ja oli ka ajalooliselt – integraalarvutuse üks olulisemaid lähtekohti. Kui pideva mittenegatiivse funktsiooni $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ graafikuga määratud kõvertrapetsi $aABb$ ümber moodustatud kõikvõimalike ristküliksummade $P^*(T)$ pindalade hulga alumine raja ja sisse moodustatud ristküliksummade $P_*(T)$ pindalade hulga ülemine raja on võrdsed, siis nende ühist väärtust loetakse kõvertrapetsi $aABb$ pindalaks. Sellest ideest lähtudes defineeritakse sama skeemi järgi tõkestatud funktsiooni f Darboux' integraal. Tähelepanuväärne on, et iga pidev funktsioon on integreeruv, ja kui ta on seejuures mittenegatiivne, siis tema graafikuga määratud kõvertrapetsi pindala võrdub selle funktsiooni integraali väärtusega.

Mõnevõrra keerulisema definitsiooniga Riemanni integraali mõiste langeb kokku Darboux' integraaliga.

12 Integreeruvate funktsioonide omadused. Newton-Leibnizi valem

Selles peatükis esitame integraali tähtsamad omadused ja näitame, kuidas on omavahel seotud diferentsiaal- ja integraalarvutus.

12.1 Integreeruvate funktsioonide omadused

Me sõnastame järgnevalt integraali tähtsamad omadused. Alustame ***lausega integreeruvusest osalõigus.***

Lause 12.1 *Kui funktsioon f on integreeruv lõigus $[a,b]$, siis on ta integreeruv igas osalõigus $[a_1,b_1]\subset[a,b]$.*

Tõestus. Olgu ε suvaline positiivne arv. Kuna f on lõigus $[a,b]$ integreeruv funktsioon, siis teoreemi 11.3 põhjal saame valida lõigu $[a,b]$ niisuguse alajaotuse $T_0[x_0,\dots,x_n]$, mis rahuldab tingimust $S(T_0)-s(T_0)<\varepsilon$. Leiame sellised $i,j\in\{1,\dots,n\}$, et

$$x_{i-1}\le a_1<x_i \quad \text{ja} \quad x_{j-1}<b_1\le x_j,$$

ja moodustame uue alajaotuse T, võttes jaotuspunktidele $x_0,\dots,x_n$ juurde punktid a_1 ning b_1, seega on tegemist alajaotusega

$$T\left[a,x_1,\dots,x_{i-1},a_1,x_i,\dots,x_{j-1},b_1,x_j,\dots,x_{n-1},b\right].$$

Selge, et T on peenem kui esialgne alajaotus T_0, seega lause 11.1 kohaselt $s(T)\ge s(T_0)$ ja $S(T)\le S(T_0)$, mistõttu

$$S(T)\ -\ s(T)\le S(T_0)\ -\ s(T_0)\ <\varepsilon$$

ehk

$$\sum_T (M_k-m_k)\,\Delta x_k\le\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,\Delta x_k<\varepsilon.$$

Siin $\sum\limits_T$ tähendab summat üle alajaotuse T osalõikude, s.t.

$$\begin{aligned}\sum_T (M_k-m_k)\,\Delta x_k &:= \sum_{k=1}^{i-1}(M_k-m_k)\,\Delta x_k+\left(\sup_{x\in[x_{i-1},a_1]}f(x)-\inf_{x\in[x_{i-1},a_1]}f(x)\right)(a_1-x_{i-1})\\ &\quad+\left(\sup_{x\in[a_1,x_i]}f(x)-\inf_{x\in[a_1,x_i]}f(x)\right)(x_i-a_1)+\sum_{k=i+1}^{j-1}(M_k-m_k)\,\Delta x_k\\ &\quad+\left(\sup_{x\in[x_{j-1},b_1]}f(x)-\inf_{x\in[x_{j-1},b_1]}f(x)\right)(b_1-x_{j-1})\\ &\quad+\left(\sup_{x\in[b_1,x_i]}f(x)-\inf_{x\in[b_1,x_i]}f(x)\right)(x_j-b_1)+\sum_{k=j+1}^{n}(M_k-m_k)\,\Delta x_k.\end{aligned}$$

Seejuures $T_1\left[a_1, x_i, \ldots, x_{j-1}, b_1\right]$ on lõigu $[a_1, b_1]$ alajaotus, mis on osa alajaotusest T, seega

$$\begin{aligned} S\left(T_1\right) \; - \; s\left(T_1\right) \; &= \left(\sup_{x\in[a_1,x_i]} f(x) - \inf_{x\in[a_1,x_i]} f(x)\right)(x_i - a_1) + \sum_{k=i+1}^{j-1} (M_k - m_k)\,\Delta x_k \\ &+ \left(\sup_{x\in[x_{j-1},b_1]} f(x) - \inf_{x\in[x_{j-1},b_1]} f(x)\right)(b_1 - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_T (M_k - m_k)\,\Delta x_k \; < \varepsilon. \end{aligned}$$

Lause 11.3 kohaselt on funktsioon f osalõigus $[a_1, b_1]$ integreeruv. ■

Integraali defineerimisel lähtusime me lõigust $[a,b]$, seega eeldasime, et $a < b$. **Lepime kokku**, et

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0 \;\text{ ja }\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ kui } b < a. \tag{12.1}$$

Järgmine lause kirjeldab omadust, mida nimetatakse ***integraali aditiivsuseks.***

Lause 12.2 *Kui funktsioon f on integreeruv lõikudes otspunktidega vastavalt a ja c ning c ja b, siis on ta integreeruv lõigus $[a,b]$ ja*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Analoogiline väide kehtib ka juhul $b < a$.

Järgmised kaks lauset esitavad ***integraali tehetega seotud omadusi.***

Lause 12.3 *Kui funktsioonid f ja g on lõigus $[a,b]$ integreeruvad, siis ka funktsioonid $f+g$ ja λf on lõigus $[a,b]$ integreeruvad ning*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

ja

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lause 12.4 *Kui funktsioonid f ja g on lõigus $[a,b]$ integreeruvad, siis ka nende korrutis fg on lõigus $[a,b]$ integreeruv.*

Osutub, et kui integreeruva funktsiooni väärtusi ***muuta lõpliku arvu argumendi väärtuste puhul,*** siis funktsioon jääb integreeruvaks, seejuures säilib integraali esialgne väärtus.

Lause 12.5 *Olgu funktsioon f lõigus $[a,b]$ integreeruv ja olgu $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ selline funktsioon, mis erineb funktsioonist f vaid lõpliku arvu argumendi väärtuste korral. Siis g on lõigus $[a,b]$ integreeruv ning*

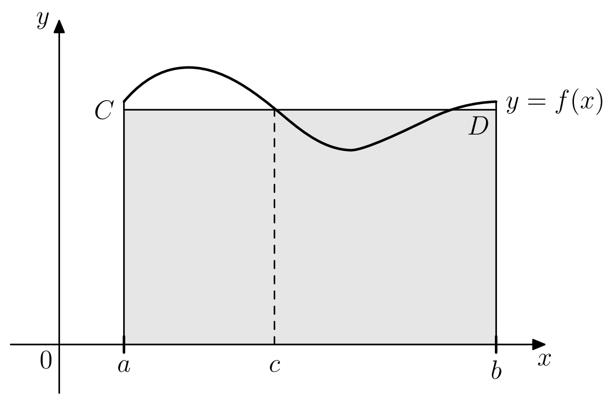
$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Järgmine lause kirjeldab ***integraali monotoonsuseomadusi.***

Lause 12.6 (a) *Kui* $f(x) \geq 0$ *iga* $x \in [a,b]$ *korral ja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on integreeruv, siis* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$
(b) *Kui* $f(x) \leq g(x)$ *iga* $x \in [a,b]$ *korral ja funktsioonid* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on integreeruvad, siis* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$
(c) *Olgu* $a \leq b$. *Kui* f *on lõigus* $[a,b]$ *integreeruv funktsioon, siis ka seosega* $|f|(x) := |f(x)|$ *määratud funktsioon* $|f|$ *on integreeruv ja*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Lõpuks esitame ***integraali keskväärtusteoreemi.***



Joonis 12.1: Integraali keskväärtusteoreemi geomeetriline tähendus.

Lause 12.7 *Kui* f *on lõigus* $[a,b]$ *pidev funktsioon, siis leidub selline* $c \in (a,b)$, *et*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c).$$

Tõestus. Kuna $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon, siis Weierstrassi teise teoreemi 4.6 põhjal on funktsioonil f lõigus $[a,b]$ suurim ja vähim väärtus. Teisisõnu, leiduvad sellised $x_1, x_2 \in [a,b]$, et

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \text{ iga } x \in [a,b] \text{ korral.}$$

Siis lause 12.6(b) kohaselt

$$f(x_1)(b-a) = f(x_1)\int_a^b \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(x_2)\int_a^b \mathrm{d}x = f(x_2)(b-a)$$

(selgitada!)✠ ehk

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(x_2).$$

Bolzano-Cauchy teoreemi 4.4 põhjal on funktsiooni f väärtuste hulk $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ intervall, mistõttu iga arv väärtuste $f(x_1)$ ja $f(x_2)$ vahel on samuti funktsiooni f väärtus. Seega leidub $c \in (a,b)$, et $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Lause on tõestatud. ■

Joonis 12.1 illustreerib integraali keskväärtusteoreemi geomeetrilist sisu: lõigus $[a,b]$ pideva mittenegatiivse funktsiooni f korral saab alusele $[a,b]$ ehitada sellise ristküliku, mille pindala võrdub funktsiooni f graafiku poolt määratud kõvertrapetsi pindalaga.

12.2 Newton-Leibnizi valem

Käesolevas alapunktis tõestame me kõigepealt teoreemi, mis seob omavahel diferentsiaal- ja integraalarvutuse. Integraalide arvutamise Newtoni-Leibnizi valem on selle teoreemi vahetu järeldus.

Olgu funktsioon f lõigus $[a,b]$ integreeruv. Kui $x \in [a,b]$, siis lause 12.1 kohaselt eksisteerib integraal $\int_a^x f(t)\,dt$, seega saame defineerida funktsiooni

$$G\colon\ [a,b] \to \mathbb{R},\ \ G(x) := \int_a^x f(t)\,dt. \tag{12.2}$$

Selle funktsiooni abil kirjeldab järgmine ***diferentsiaal- ja integraalarvutuse põhiteoreem*** seost integraali ja tuletise vahel.

Teoreem 12.8 *Kui f on lõigus $[a,b]$ pidev funktsioon, siis funktsioon G on lõigus $[a,b]$ diferentseeruv ja*

$$G'(x) = f(x)\ \text{ iga } x \in [a,b] \text{ korral.}$$

Teisisõnu, G on funktsiooni f algfunktsioon lõigus $[a,b]$.

Tõestus. Eeldame, et $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon. Olgu $x \in [a,b]$ suvaline, näitame, et funktsioon G on punktis x diferentseeruv. Kui $z \in [a,b]$ ning $z \neq x$, siis, arvestades integraali aditiivsuseomadust (vt. lause 12.2) ja kokkulepet (12.1), saame, et

$$G(z) = \int_a^z f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^z f(t)\,dt = G(x) + \int_x^z f(t)\,dt,$$

seega

$$\frac{G(z) - G(x)}{z - x} = \frac{1}{z - x}\int_x^z f(t)\,dt.$$

Rakendades integraali keskväärtusteoreemi (vt. lause 12.7), leiame arvude x ja z vahel sellise punkti $c(z)$, et kehtib võrdus

$$f(c(z)) = \frac{1}{z - x}\int_x^z f(t)\,dt,$$

niisiis

$$\frac{G(z) - G(x)}{z - x} = f(c(z)).$$

Kuna $c(z)$ paikneb punktide x ja z vahel, siis protsessis $z \to x$ punkt $c(z)$ läheneb punktile x, seejuures tänu funktsiooni pidevusele $\lim\limits_{c(z)\to x} f(c(z)) = f(x)$. Niisiis,

$$G'(x) = \lim_{z\to x}\frac{G(z) - G(x)}{z - x} = \lim_{c(z)\to x} f(c(z)) = f(x).$$

Teoreem on tõestatud. ■

Järeldus 12.9 *Igal lõigus pideval funktsioonil on selles lõigus algfunktsioon.*

Järeldus 12.10 ***(Newton-Leibnizi valem)***. *Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a,b]$, siis*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b, \tag{12.3}$$

kus F on funktsiooni f suvaline algfunktsioon.

Tõestus. Olgu F funktsiooni f mingi algfunktsioon. Teoreemi 12.8 kohaselt on ka G funktsiooni f üks algfunktsioonidest, seega $G(x) = F(x) + C$, kus C on mingi konstant (vrd. alapunkt 8.1). Seosest $G(a) = 0$ (vrd. kokkulepe (12.1)) järeldub, et $C = -F(a)$. Tähendab, $G(x) = F(x) - F(a)$ iga $x \in [a,b]$ korral, siit tulenebki võrdus (12.3). ■

Me lõpetame selle peatüki lausega, mis annab muutujate vahetuse valemi määratud integraalis.

Lause 12.11 *Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Kui $x = \varphi(t)$, kus $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ on selline pidevalt diferentseeruv funktsioon, et $\varphi(\alpha) = a$ ning $\varphi(\beta) = b$, siis kehtib valem*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tõestus. Kuna f on pidev funktsioon siis kehtib valem (12.3), kus F on funktsiooni f algfunktsioon lõigus $[a,b]$. Siis $F \circ \varphi$ on funktsiooni $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ algfunktsioon lõigus $[\alpha,\beta]$ (vt. valemi (8.3) tõestus 8. peatükis). Seega Newton-Leibnizi valemi põhjal (peame silmas, et $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ on pidev funktsioon)

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta ((f \circ \varphi)\,\varphi')(t)\,\mathrm{d}t = F \circ \varphi(\beta) - F \circ \varphi(\alpha) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Lause on tõestatud. ■

Kokkuvõte

Eelpool toodud integraali omadused on tegelikult integraalarvutuse kõige tähtsamad reeglid, need osutuvad integraali keerulisest definitsioonist hoolimata lihtsateks ja käepärasteks. Näiteks on nii teoreetilisest kui ka rakenduslikust seisukohast oluline integraali aditiivsuse omadus: kui eksisteerivad integraalid $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ ja $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, siis eksisteerib ka $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ning $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Muidugi ei ole vähem tähtsad integraali tehetega seotud ja monotoonsuseomadused. Integraali keskväärtusteoreemi abil tõestatakse diferentsiaal- ja integraalarvutuse põhiteoreem, mis seob need nimetatud kaks analüüsi haru üheks tervikuks. Põhiteoreemist tuleneb vahetult Newton-Leibnizi valem pideva funktsiooni integraali arvutamiseks.

13 Integraali geomeetrilised rakendused. Päratud integraalid

Käesolevas viimases peatükis demonstreerime integraalarvutuse rakendamist tasandiliste kujundite pindala, ruumiliste kehade ruumala ja joonte kaare pikkuse leidmisel ning tutvume põgusalt päratute integraalidega.

13.1 Integraali rakendused

Kõvertrapetsi pindala arvutamine. Nagu veendusime 11. peatüki lõpus, arvutatakse pideva mittenegatiivse funktsiooni $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ graafikuga AB ning sirgetega $y=0$, $x=a$ ja $x=b$ määratud kõvertrapetsi $aABb$ (vt. joonis 11.1) pindala valemiga

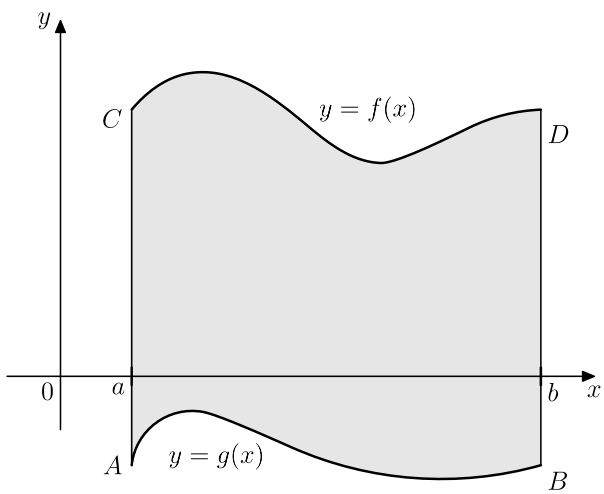
$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.1}$$

Kui seejuures funktsioon $y = f(x)$ on antud parameetriliste võrranditega

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \text{ kus } t \in [\alpha, \beta],$$

siis eeldusel, et $\varphi\colon\ [\alpha,\beta] \to [a,b]$ on pidevalt diferentseeruv funktsioon ning $a = \varphi(\alpha)$ ja $b = \varphi(\beta)$, lause 12.11 kohaselt

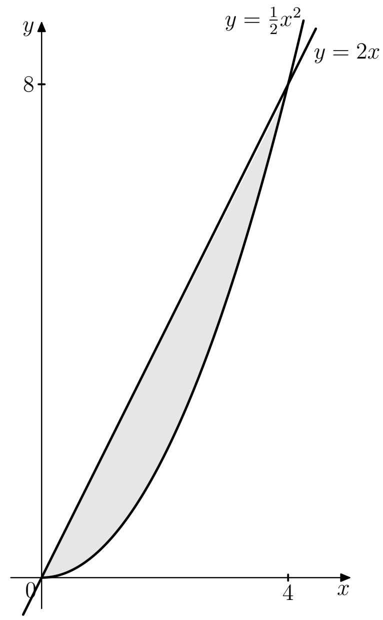
$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$



Joonis 13.1: Joontega $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ määratud üldine kõvertrapets.

Olgu $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $g\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ sellised pidevad funktsioonid, et $g(x) \le f(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral. Joontega $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ ja sirgetega $x = a$ ning $x = b$ määratud tasandilist kujundit nimetatakse *üldiseks kõvertrapetsiks* (vt. joonis 13.1), selle pindala saadakse kahe kõvertrapetsi pindala vahena valemist

$$S_{ACDB} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x. \tag{13.2}$$



Joonis 13.2: Joontega $y = \frac{1}{2}x^2$ ja $y = 2x$ määratud kõvertrapets.

Näide 13.1. Leiame joontega $y = \frac{1}{2}x^2$ ja $y = 2x$ määratud kujundi pindala xy-tasandil (vt. joonis 13.3). Joonte lõikumispunktide leidmiseks lahendame võrrandi

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0,$$

selle lahenditeks on arvud 0 ja 4, seejuures $\frac{1}{2}x^2 \leq 2x$ kõikide $x \in [0,4]$ korral. Funktsioonidele

$$g\colon\ [0,4] \to \mathbb{R},\ \ g(x) := 2x \text{ ja } f\colon\ [0,2] \to \mathbb{R},\ \ f(x) := \frac{1}{2}x^2$$

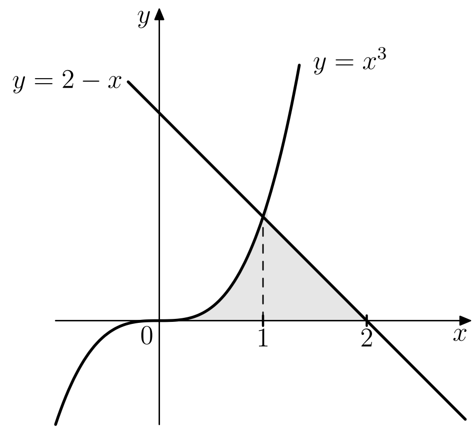
valemit (13.2) rakendades saame nende graafikutega määratud kujundi pindala:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x = 2\int_0^4 x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{2}x^2\Big|_0^4 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3\Big|_0^4 \\ &= 16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

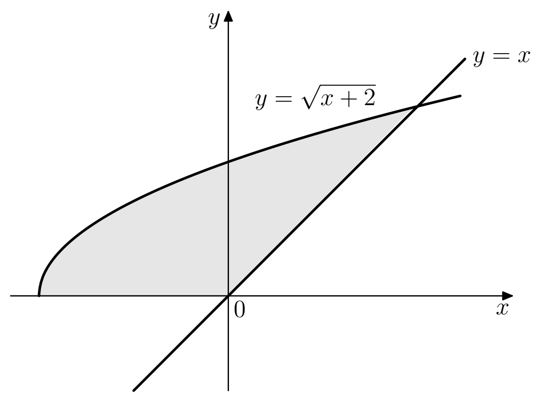
Näide 13.2. Leiame joontega $y = x^3$, $y = 2 - x$ ja $y = 0$ määratud kujundi pindala xy-tasandil (vt. joonis 13.4). Kahe esimes joone lõikepunkt on $(1,1)$, seega koosneb vaadeldav kujund kahest kõvertrapetsist, ühe määrab kuupfunktsiooni graafik lõigu $[0,1]$ kohal, teise lineaarne funktsioon lõigu $[1,2]$ kohal. Selle kujundi pindala on nende kahe kõvertrapetsi pindalade summa:

$$S = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 = 2\frac{1}{4} - 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Näide 13.3. Leiame selle kujundi pindala, mis on määratud joontega $y = \sqrt{x+2}$, $y = x$ ja $y = 0$ (vt. joonis 13.5). Esimene neist lõikab x-telge kohal $x = -2$, esimese ja teise joone



Joonis 13.3: Joontega $y = x^3$, $y = 2 - x$ ja $y = 0$ määratud kujund.



Joonis 13.4: Joontega $y = \sqrt{x+2}$, $y = x$ ja $y = 0$ määratud kujund.

lõikepunkti abstsissi saame võrrandist $\sqrt{x+2} - x = 0$, see on $x = 2$. Nende joonte poolt määratud kujundi pindala on kahe kõvertrapetsi pindala summa:

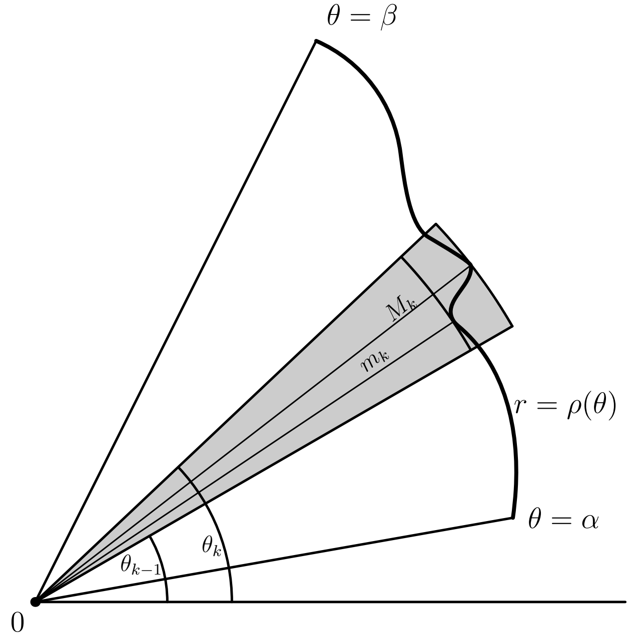
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0} \sqrt{x+2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \left(\sqrt{x+2} - x\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{2} \sqrt{x+2}\mathrm{d}x - \int_{0}^{2} x\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \left(x+2\right)^{3/2}\Big|_{-2}^{2} - \frac{1}{2}\, x^2\Big|_{0}^{2} \\ &= \frac{16}{3} - 2 = \frac{19}{3}. \end{aligned}$$

Olgu joon AB antud polaarkoordinaatides (r, θ) võrrandiga $r = \rho(\theta)$, kus $\theta \in [\alpha, \beta]$, eeldame, et $\rho\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ on pidev mittenegatiivne funktsioon. Joonega AB ja kiirtega $\theta = \alpha$ ning $\theta = \beta$ (eeldame, et $0 \le \alpha \le \beta \le 2\pi$) piiratud kujundit

$$OAB := \{(r, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\, 0 \le r \le \rho(\theta)\}$$

nimetatakse *kõversektoriks* (vt. joonis 13.2). Selle pindala saab esitada valemiga

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \int_{a}^{b} \rho(\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta. \tag{13.3}$$

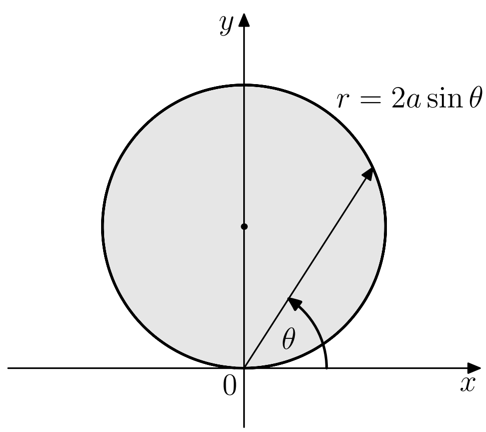


Joonis 13.5: Joonega $r = \rho(\theta)$ määratud kõversektor.

Näide 13.4. Olgu $a > 0$. Leiame joonega

$$r = 2a \sin\theta, \text{ kus } \theta \in [0, \pi],$$

määratud kõversektori pindala (vt. joonis 13.6). Näitame kõigepealt, et vaadeldav joon on



Joonis 13.6: Joonega $r = 2a\sin\theta$, kus $\theta \in [0, \pi]$, määratud kujund.

ringjoon. Selleks esitame ta parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta = 2a\sin\theta\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta = 2a\sin^2\theta \end{cases}$$

ja paneme tähele, et

$$x^2 + y^2 = 4a^2\sin^2\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 2ay$$

ehk

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2.$$

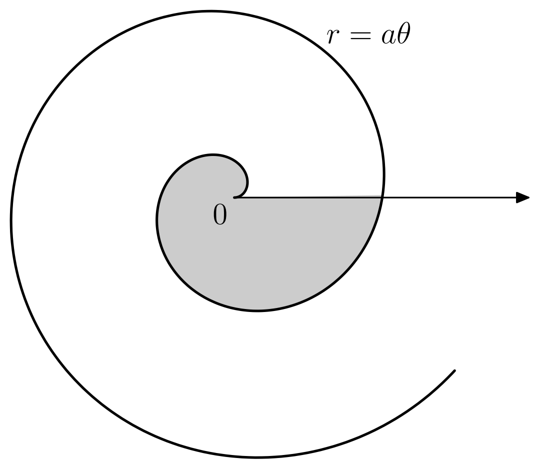
Niisiis on tõepoolest tegemist ringjoonega, mille keskpunkt on punktis $(0, a)$ ja raadius on a (vt. joonis 13.6). Sellega piiratud ringi pindala leidmiseks arvutame valemi (13.3) abil poolringi pindala ja korrutame selle kahega:

$$\begin{aligned} S &= 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \rho(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} 4a^2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta = 4a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta \\ &= 2a^2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta - 2a^2\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2a^2\pi}{2} - a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/2} = \pi a^2. \end{aligned}$$

Näide 13.5. Olgu $a > 0$. Leiame Archimedese spiraali

$$r = a\theta$$

ühe keeru ja polaarteljega piiratud kujundi pindala (vt. joonis 13.7). Valemi (13.3) kohaselt



Joonis 13.7: Archimedese spiraali $r = a\theta$ ühe keeruga määratud kujund.

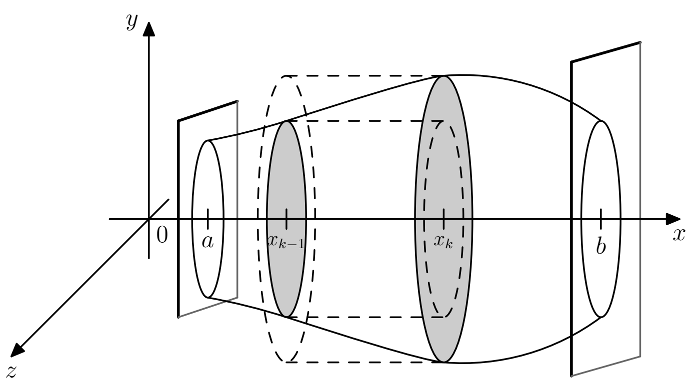
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} a^2\theta^2\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\frac{1}{3}\theta^3\Big|_0^2 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

Keha ruumala arvutamine. Kui püstsilindri põhjaks on mingi tasandiline kujund pindalaga S ning silindri kõrgus on h, siis arvutatakse tema ruumala valemist $V = hS$. Olgu K mingi keha xyz-ruumis piiratud tasanditega $x = a$ ja $x = b$. Eeldame, et kui lõikame keha tasanditega, mis on x-teljega ortogonaalsed, siis saadud lõiked rahuldavad järgmisi tingimusi:
1) iga punkti $x \in [a, b]$ läbiv tasand tekitab lõike, millel on pindala, tähistame selle $S(x)$,
2) suvalise kahe lõike korral ühe projektsioon teisele on täielikult selle sees (vt. joonis 13.8),
3) funktsioon $S\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on pidev.
Lõigu $[a, b]$ alajaotuse $T[x_0, \ldots, x_n]$ puhul tähistame

$$m_k := \min\{S(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad \text{ja} \quad M_k := \max\{S(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

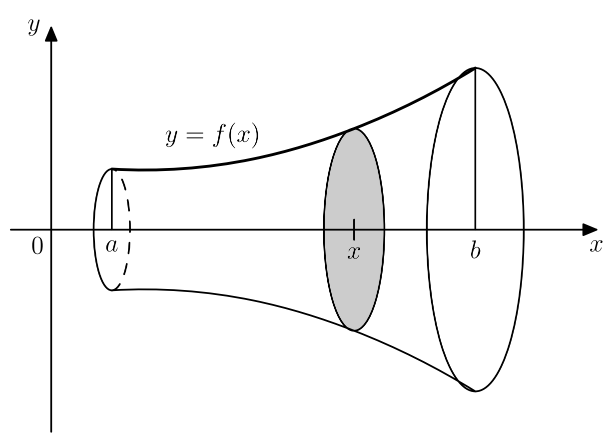
Tasanditega $x = x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ jaotatakse keha K kihtideks, iga selline kiht K_k sisaldab püstsilindrit, mille kõrgus on Δx_k ja põhja pindala m_k, seega on selle silindri ruumala $m_k \Delta x_k$. Samas sisaldub K_k püstsilindris kõrgusega Δx_k ja põhja pindalaga M_k. Niisiis sisaldab K silindritest koosnevat keha $P_*(T)$ ruumalaga $v(T) := \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ ja sisaldub silindritest koosnevas kehas $P^*(T)$ ruumalaga $V(T) := \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$. Selge, et $v(T)$ ja $V(T)$ on funktsiooni S Darboux' summad alajaotuse T suhtes. Kuna funktsioon $S\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev, siis on ta integreeruv ja $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{v(T) \mid T \in \mathfrak{T}_{[a,b]}\right\} = \inf\left\{V(T) \mid T \in \mathfrak{T}_{[a,b]}\right\}$, seda arvu loemegi keha K ruumalaks. Niisiis, vaadeldava keha K ruumala arvutatakse valemiga

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.4}$$



Joonis 13.8: Keha ruumala.

Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon, siis joontega $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ ja $y = 0$ piiratud kõvertrapetsi pöörlemisel ümber x-telje tekib pöördkeha, mille puhul eelpool toodud eeldused 1) – 3) on täidetud (vt. joonis 13.9). Nimelt on punkti $x \in [a,b]$ sisaldavaks lõikeks



Joonis 13.9: Pöördkeha ruumala.

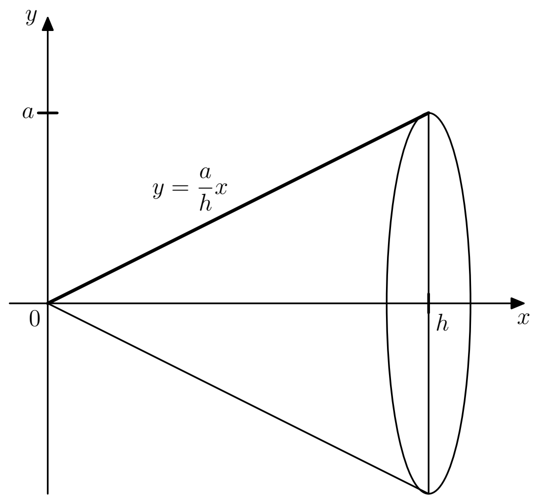
ring raadiusega $f(x)$, niisiis on funktsioon

$$S\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ \ S(x) := \pi f(x)^2$$

pidev (põhjendada!)✠. Vastavalt valemile (13.4) saame sellise pöördkeha ruumala arvutamiseks valemi

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x. \tag{13.5}$$

Näide 13.6. Leiame sellise koonuse ruumala, mille põhjaks oleva ringi raadius on a ning kõrguseks h. Valime koordinaatsüsteemi nii, et koordinaatide algus on koonuse tipus ja koonuse telg on x-teljel (vt. joonis 13.10). Lõikeks, mis tekib teljega risti oleva tasandiga kohal x, on ring raadiusega $r(x) = \frac{ax}{h}$ (selgitada!)✠ ja pindalaga $S(x) = \frac{\pi a^2 x^2}{h^2}$. Koonuse



Joonis 13.10: Koonusega määratud keha ruumala arvutamine.

ruumala leiame valemiga (13.4):

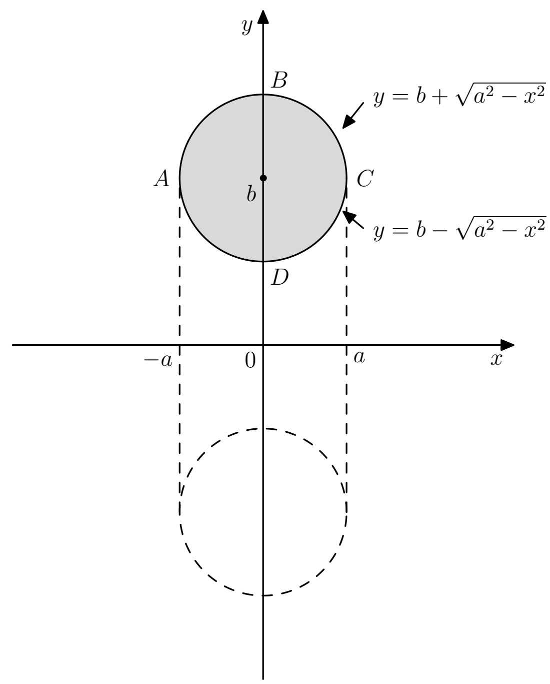
$$V = \frac{\pi a^2}{h^2} \int_0^h x^2 \mathrm{d}x = \left. \frac{\pi a^2 h^3}{3h^2} \right|_0^h = \left. \frac{\pi a^2 h}{3} \right|_0^h = \frac{1}{3} \pi a^2 h.$$

Sama tulemuseni jõuame ka valemit (13.5) rakendades. Nimelt, kui vaatleme koonust pöördkehana, mis tekib kolmnurga (ehk joontega $y = \frac{a}{h}x$, $x = h$ ja $y = 0$ piiratud kõvertrapetsi) OAB pöörlemisel ümber x-telje, siis

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{a}{h} x \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{h^2} \int_0^h x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \pi a^2 h.$$

Näide 13.7. Teatavasti nimetatakse *tooriks* ehk *rõngaspinnaks* sellist pöördpinda, mis tekib ringjoone pöörlemisel ümber selle ringjoonega samal tasandil oleva ning ringjoonega mittelõikuva sirge. Leiame tooriga piiratud keha ruumala, kui ringjoone raadius on a ja sirge kaugus ringjoone keskpunktist $b > 0$. Määrame koordinaatteljed nii, et antud sirge langeb kokku x-teljega ja y-telg läbib ringjoonega piiratud ringi keskpunkti (vt. joonis 13.11). Lihtne on näha, et tooriga määratud keha ruumala on kahe pöördkeha ruumalade vahe, neist üks tekib kõvertrapetsi $-aABCa$ ja teine kõvertrapetsi $-aADCa$ pöörlemisel ümber x-telje. Ringjoone võrrandist $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ saame, et kõverad ABC ja ADB on määratud vastavalt võrrandiga

$$y = b + \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{ning} \quad y = b - \sqrt{a^2 - x^2}.$$



Joonis 13.11: Tooriga määratud keha ruumala arvutamine.

Valemi (13.5) põhjal

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-a}^{a} \left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \pi \int_{-a}^{a} \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-a}^{a} \left(\left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2\right) \mathrm{d}x \\
&= 4\pi a^2 b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \mathrm{d}x = 4\pi a^2 b \int_{0}^{2\pi} \sin^2 t \mathrm{d}t \text{ (selgitada!)} \maltese \\
&= 2\pi^2 a^2 b.
\end{aligned}$$

Joone kaare pikkuse arvutamine. Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ selline pidev funktsioon, mis vahemikus (a,b) on pidevalt diferentseeruv. Olgu $T\,[x_0, \ldots, x_n]$ lõigu $[a,b]$ mingi alajaotus, moodustame funktsiooni f graafiku AB kõõlmurdjoone tippudega $f(a), f(x_1), \ldots, f(b)$ (vt. joonis 13.12). Pythagorase teoreemi põhjal saame murdjoone k-nda lüli pikkuseks

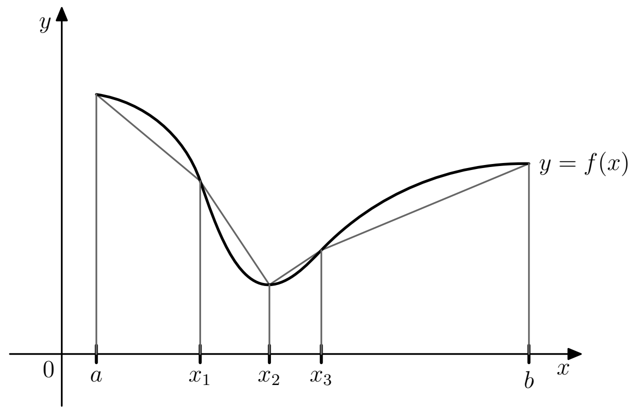
$$l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Rakendame funktsioonile f lõigus $[x_{k-1}, x_k]$ Lagrange'i keskväärtusteoreemi (vt. lause 6.3), selle kohaselt leidub niisugune $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$, et

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)\,\Delta x_k.$$

Seega

$$l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\,\Delta x_k)^2} = \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\Delta x_k$$



Joonis 13.12: Joone kaare pikkus.

ning kogu murdjoone pikkus

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_k)^2} \Delta x_k$$

on pideva funktsiooni $y = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ integraalsumma. Riemanni integraali definitsiooni kohaselt saame joone AB pikkuseks $l = \lim\limits_{\lambda(T) \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k$ ehk

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \mathrm{d}x. \tag{13.6}$$

Kui joon AB on antud parameetrilisel kujul võrranditega

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \text{ kus } t \in [\alpha, \beta],$$

siis eeldusel, et funktsioonid φ ja ψ on vahemikus (α, β) pidevalt diferentseeruvad, saab valem (13.6) kuju

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} \mathrm{d}t. \tag{13.7}$$

Polaarkoordinaatides võrrandiga

$$r = \rho(\theta), \text{ kus } \theta \in [\alpha, \beta],$$

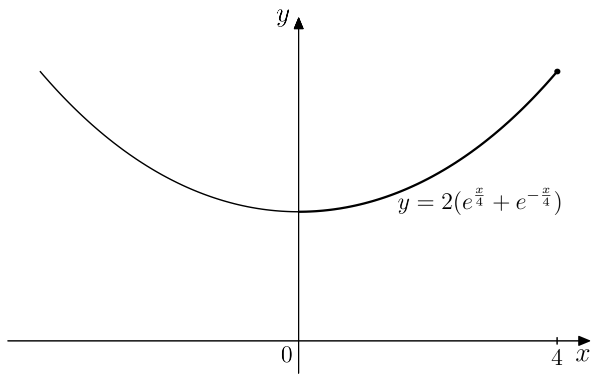
antud joone puhul saame valemi

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} \mathrm{d}\theta, \tag{13.8}$$

ka sel juhul eeldatakse funktsiooni $\rho\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ pidevat diferentseeruvust.

Näide 13.8. Leiame aheljoone $y = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)$ selle kaare pikkuse, mis on punktide $(0, 4)$ ning $\left(4, 2\left(e + \frac{1}{e}\right)\right)$ vahel (vt. joonis 13.13). Kuna funktsioon

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) := 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)$$



Joonis 13.13: Aheljoon $y = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)$.

on pidevalt diferentseeruv, siis saame kasutada valemit (13.6). Arvutame

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - 2 + e^{-\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} + 2 + e^{-\frac{x}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)^2,$$

seega

$$l = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right) \mathrm{d}x = 2\left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right)\Big|_0^4 = 2\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

Näide 13.9. Leiame sellise joone pikkuse, mis on antud parameetriliste võrranditega

$$x = \varphi(t) := \int_1^t \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u, \ \ y = \psi(t) := \int_1^t \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u, \text{ kus } t \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right].$$

Mõlemad funktsioonid φ ja ψ on vahemikus $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ pidevalt diferentseeruvad, seejuures

$$\varphi'(t) = \frac{\cos t}{t} \ \text{ ja } \ \psi'(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

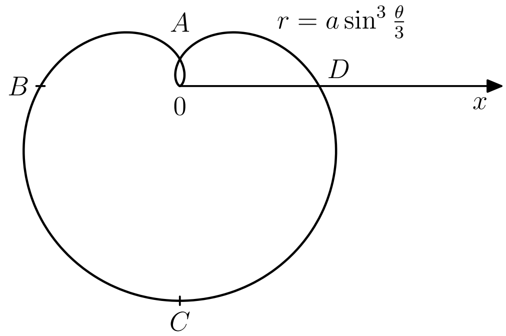
Valemi (13.7) põhjal saame, et

$$l = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 t}{t^2} + \frac{\sin^2 t}{t^2}}\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln\frac{\pi}{2} = \ln\pi - \ln 2.$$

Näide 13.10. Olgu $a > 0$. Leiame polaarkoordinaatides võrrandiga $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$ antud kinnise joone pikkuse. Paneme tähele, et kuna $r \geq 0$, siis $\sin\frac{\theta}{3} \geq 0$, seega $\theta \in [0, 3\pi]$. Joone kirjeldamiseks märgime, et kui polaarnurk muutub nullist kuni arvuni $\frac{3}{2}\pi$, siis kasvavad funktsiooni

$$\rho\colon \ [0, 3\pi] \to \mathbb{R}, \ \ \rho(\theta) := a\sin^3\frac{\theta}{3}$$

väärtused nullist arvuni a ning raadiusvektori otspunkt liigub punkti C mööda kõverat $OABC$ (vt. joonis 13.14). Polaarnurga muutumisel arvust $\frac{3}{2}\pi$ arvuni 3π kahanevad funktsiooni väärtused $\rho(\theta)$ arvust A nullini ja nii saame kaare $CDAO$.



Joonis 13.14: Joon $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$.

Kuna funktsioon ρ on pidevalt diferentseeruv, siis võime joone pikkuse leidmiseks rakendada valemit (13.8). Arvutame

$$\rho'(\theta) = a\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$$

ning

$$\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} = \sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3} + a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}$$
$$= a\sin^2\frac{\theta}{3}\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{3} + \cos^2\frac{\theta}{3}} = a\sin^2\frac{\theta}{3},$$

seega

$$l = a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta = a\int_0^{3\pi}\frac{\left(1-\cos\frac{2\theta}{3}\right)}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{a}{2}\left(\theta - \frac{3}{2}\sin\frac{2\theta}{3}\right)\Big|_0^{3\pi}$$
$$= \frac{3a\pi}{2}.$$

13.2 Päratud integraalid

Lõpmatute rajadega päratud integraalid. Definitsioon. Olgu $a \in \mathbb{R}$ ja funktsioon f määratud tõkestamata intervallis $[a,\infty)$. Kui
1) f on integreeruv igas lõigus $[a,l]$, kus $l > a$, ning
2) eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{l\to\infty}\int_a^l f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{13.9}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse *funktsiooni f päratuks integraaliks rajades a-st ∞-ni* ja tähistatakse

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.10}$$

Kui piirväärtus (13.9) on lõplik, siis öeldakse, et päratu integraal (13.10) *koondub*.

Definitsioon. Olgu $b \in \mathbb{R}$ ja funktsioon f määratud tõkestamata intervallis $(-\infty, b]$. Kui
1) f on integreeruv igas lõigus $[m, b]$, kus $m < b$, ning
2) eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{m\to-\infty} \int_m^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{13.11}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse *funktsiooni f päratuks integraaliks rajades $-\infty$-st b-ni* ja tähistatakse

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.12}$$

Kui piirväärtus (13.11) on lõplik, siis öeldakse, et päratu integraal (13.12) *koondub*.

Definitsioon. Funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{13.13}$$

kui mõlemad päratud integraalid võrduse paremal poolel eksisteerivad mingi $c \in \mathbb{R}$ korral.

Mittekoonduvat päratut integraali nimetatakse *hajuvaks*. Me ütleme mõnikord *päratu integraali* asemel lühidalt *integraal*, kuid rõhutame, et üldjuhul ei ole tegemist integraaliga eelpool antud definitsioonide mõttes.

Näide 13.11. Arvutame päratu integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Iga $l \geq 0$ korral eksisteerib integraal

$$\int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^l = \arctan l - \arctan 0 = \arctan l.$$

Seega

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{l\to\infty} \int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{l\to\infty} \arctan l = \frac{\pi}{2}.$$

Näide 13.12. Päratu integraal

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

hajub, sest

$$\lim_{m\to-\infty} \int_m^0 \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{m\to-\infty} \frac{1}{2} \int_m^0 \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{m\to-\infty} \ln\left(1+x^2\right)\Big|_m^0$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{m\to-\infty} \left(\ln 1 - \ln\left(1+m^2\right)\right) = -\frac{1}{2} \lim_{m\to-\infty} \ln\left(1+m^2\right) = -\infty.$$

Näide 13.13. Leiame
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10}.$$
Selleks arvutame
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10} &= \lim_{m\to-\infty}\int_{m}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10} = \lim_{m\to-\infty}\int_{m}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+9} \\ &= \frac{1}{9}\lim_{m\to-\infty}\int_{m}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\lim_{m\to-\infty}\int_{m}^{0} \frac{d\left(\frac{x+1}{3}\right)}{1+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3}\lim_{m\to-\infty}\arctan\frac{x+1}{3}\Big|_{m}^{0} = \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lim_{m\to-\infty}\arctan\frac{x+1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3} + \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$
ja analoogiliselt
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3}$$
(kontrollida!)✠. Seega
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10} + \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10} = \frac{\pi}{3}.$$

Olgu funktsioon f igas osalõigus $[a,l]$, kus $l \geq a$, integreeruv. Sel juhul
$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ koondub parajasti siis, kui } \int_{a_1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ koondub iga } a_1 \geq a \text{ korral.} \tag{13.14}$$
Tõepoolest, kui fikseeritud $a_1 \geq a$ puhul $l \geq a_1$, siis
$$\int_{a}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x$$
ning lõplik piirväärtus $\lim\limits_{l\to\infty}\int_a^l f(x)\,\mathrm{d}x$ eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim\limits_{l\to\infty}\int_{a_1}^l f(x)\,\mathrm{d}x$. Samasugune väide kehtib muidugi ka integraali $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ puhul. Sellest ning tavalise integraali aditiivsuseomadusest järeldub, et *kui päratu integraal* (13.13) *koondub, siis ei sõltu selle väärtus arvu $c \in \mathbb{R}$ valikust***.** Nimelt, suvaliste c_1 ja c_2 puhul, kus $c_1 < c_2$, saame, et
$$\begin{aligned}\int_{m}^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{m}^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_2}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{m}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_2}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
ja
$$\int_{-\infty}^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_2}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Näide 13.14. Vaatleme päratut integraali

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^q} \mathrm{d}x, \tag{13.15}$$

kus $q > 0$ ja $a > 0$. Juhul $q = 1$ on

$$F(l) := \int_a^l \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln l - \ln a$$

ja lõplikku piirväärtust $\lim\limits_{l\to\infty} F(l)$ ei eksisteeri. Kui $q \neq 1$, siis

$$F(l) = \frac{1}{(1-q)\, l^{q-1}} - \frac{1}{(1-q)\, a^{q-1}}$$

ja lõplik piirväärtus $\lim\limits_{l\to\infty} F(l)$ on olemas parajasti siis, kui $q > 1$. Niisiis, ***päratu integraal*** (13.15) ***koondub parajasti siis, kui*** $q > 1$.

Tõestuseta esitame järgmise lõpmatute rajadega ***integraalide võrdluslause.***

Lause 13.1 *Kui funktsioonid f ja g on igas lõigus $[a, l]$, kus $l \geq a$, integreeruvad ning leidub arv $a_1 \geq a$, et*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \;\; \textit{iga } x \in [a_1, \infty) \;\; \textit{korral,}$$

siis integraali $\int_a^\infty g(x)\, \mathrm{d}x$ koonduvusest järeldub integraali $\int_a^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$ koonduvus. Kui integraal $\int_a^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$ hajub, siis hajub ka integraal $\int_a^\infty g(x)\, \mathrm{d}x$.

Näide 13.15. Võrdluslause abil on lihtne veenduda, et integraal

$$\int_1^\infty \frac{\arcsin x}{1 + x^7} \mathrm{d}x$$

on koonduv. Tõepoolest, kuna

$$0 \leq \frac{\arcsin^2 x}{1 + x^7} < \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{x^7} \;\; \text{iga } x \in [1, \infty) \;\; \text{korral}$$

ja näite 13.5 kohaselt $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$ koondub, siis lause 13.1 põhjal koondub ka vaadeldav integraal.

Tõkestamata funktsiooni päratu integraal. Me ütleme, et funktsioon $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ on *punkti b ümbruses tõkestamata*, kui iga $\delta \in (0, b - a)$ ja suvalise etteantud arvu $M > 0$ korral leidub selline $x \in (b - \delta, b)$, et

$$|f(x)| > M.$$

Analoogiliselt defineerime funktsiooni $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ tõkestamatuse punkti a ümbruses (iseseisvalt!)✠.

Definitsioon. Olgu funktsioon $f\colon\ [a,b)\to\mathbb{R}$ punkti b ümbruses tõkestamata, kuid igas osalõigus $[a,l]$, kus $a<l<b$, integreeruv. Kui eksisteerib

$$\lim_{l\to b-}\int_a^l f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{13.16}$$

siis nimetame seda piirväärtust funktsiooni f *päratuks integraaliks rajades a-st b-ni* ja tähistame (samamoodi kui tavalist Riemanni integraali) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Kui piirväärtus (13.16) on lõplik, siis öeldakse, et päratu integraal $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ koondub.

Definitsioon. Olgu funktsioon $f\colon\ (a,b]\to\mathbb{R}$ punkti a ümbruses tõkestamata, kuid igas osalõigus $[m,b]$, kus $a<m<b$, integreeruv. Kui eksisteerib

$$\lim_{m\to a+}\int_m^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{13.17}$$

siis nimetame seda piirväärtust samuti funktsiooni f *päratuks integraaliks rajades a-st b-ni* ja tähistame $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Kui piirväärtus (13.17) on lõplik, siis öeldakse, et päratu integraal $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ koondub.

Definitsioon. Eeldame, et funktsioon $f\colon\ (a,b)\to\mathbb{R}$ on tõkestamata nii punkti a kui ka punkti b ümbruses, kuid mingi $c\in(a,b)$ korral eksisteerivad päratud integraalid $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ ja $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Siis defineerime päratu integraali seosega

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Seda nimetatakse koonduvaks, kui mõlemad päratud integraalid $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ ja $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ koonduvad.

Näide 13.16. Vaatleme päratut integraali

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q} \tag{13.18}$$

kus $a<b$ ja $q>0$. Juhul $q=1$ kehtib valem

$$F(l) := \int_a^l \frac{\mathrm{d}x}{b-x} = \ln(b-a)-\ln(b-l)$$

ning $\lim\limits_{l\to b-} F(l)=\infty$. Kui $q\neq 1$, siis

$$F(l) = \frac{1}{1-q}(b-a)^{1-q} - \frac{1}{1-q}(b-l)^{1-q}$$

ning

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q} = \lim_{l\to b-} F(l) = \frac{1}{1-q}(b-a)^{1-q}$$

eksisteerib parajasti tingimusel $q<1$. Niisiis, integraal (13.18) koondub parajasti siis, kui $q<1$.

Samamoodi veendutakse, et päratu integraal

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$$

koondub parajasti siis, kui $q < 1$.

Näide 13.17. Päratu integraal

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$$

hajub:

$$\lim_{m\to 1} \int_m^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \lim_{m\to 1} \int_m^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{m\to 1} \ln\ln x\Big|_m^2$$
$$= \ln\ln 2 - \lim_{m\to 1} \ln\ln m = \infty.$$

Analoogiliselt lausega 13.1 tõestatakse järgmine ***võrdluslause.***

Lause 13.2 *Kui $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ ja $g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ on igas lõigus $[a,l]$, kus $a < l < b$, integreeruvad ning leidub selline $a_1 \in (a,b)$, et $0 \le f(x) \le g(x)$ iga $x \in [a_1, b)$ korral, siis integraali $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ koonduvusest järeldub integraali $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ koonduvus ning integraali $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ hajuvusest integraali $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ hajuvus.*

Samasugune väide kehtib loomulikult ka funktsioonide $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ ja $g\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ korral.

Näide 13.18. Võrdluslause 13.2 põhjal päratu integraal

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$$

koondub:

$$0 < \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \frac{1}{x\sqrt{3x+1}\sqrt{x-1}} \le \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \text{ iga } x \in (1,2] \text{ korral}$$

ja integraal $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ koondub näite 13.16 kohaselt.

Kokkuvõte

Tasandiliste kujundite pindala arvutamisel on aluseks 11. peatükis saadud kõvertrapetsi pindala valem: pideva funktsiooni graafikuga määratud kõvertrapetsi pindala võrdub selle funktsiooni integraaliga. Sama skeemi, mida kasutatakse kõvertrapetsi pindala puhul, rakendatakse keha ruumala ja joone kaare pikkuse valemi põhjendamisel. Ruumala puhul on Darboux' summade rollis teatavate püstsilindrite ühendite ruumalad, kaare pikkuse puhul moodustavad kõõlmurdjoonte pikkused Riemanni integraalsummad.

Päratud integraalid kirjeldavad seoseid, mida saab esitada tavaliste integraalide piirväärtustena. Kui eksisteerivad integraalid $F(l) := \int_a^l f(x)\,\mathrm{d}x$, kus $l \ge a$, ja lõplik piirväärtus

$\lim\limits_{l\to\infty} F(l) =: \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, siis kõneldakse koonduvast (lõpmatu rajaga) päratust integraalist $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Näiteks koondub päratu integraal $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ parajasti siis, kui $\alpha > 1$. Analoogiliselt käsitletakse päratuid integraale $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Teine liik päratuid integraale on seotud funktsiooniga $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$, mis punkti b ümbruses ei ole tõkestatud. Kui $F(l) := \int_a^l f(x)\,\mathrm{d}x$ eksisteerib iga $l \in [a,b)$ korral ja on olemas lõplik piirväärtus $\lim\limits_{l\to b-} F(l) =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, siis öeldakse, et tõkestamata funktsiooni f päratu integraal $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ koondub. Näiteks, integraal $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ koondub parajasti siis, kui $\alpha < 1$. Analoogiliselt defineeritakse punkti a ümbruses tõkestamata funktsiooni $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ päratu integraal.

Päratute integraalide koonduvusega seotud probleemid ja nende uurimise võtted on sarnased ridade vastavate probleemide ja võtetega.