Sügis 2014

Märkusi matemaatilise analüüsi 1. kontrolltöö kohta:

A. Kontrolltöö osutus kaunis keeruliseks. Kollektiivne sooritus artimeetilise keskmisena on napilt üle E piiri ja parimad tulemused hinde C piirimail (kaks tööd 23-st!). Ning see oli esimene ja kõige lihtsam kontrolltöö. Siin tuleb endale võtta järelemõtlemise koht ning selgusele jõuda, kuidas võtta loengust, praktikumist, lisapraktikumidest ja iseseisvast tööst maksimumi. Mina olen valmis teid aitama, aga ei ole võimalik aidata inimesi, kes abi saada ei taha.
Kontrolltöö tegijatest väärivad äramärkimist:

1. Mattias Nurk, kelle töö oli selgelt teistest parem;
2. Anton Matskevitš, Martin Põhjakivi, Helen Pajor ja Johannes Jürjo, kes said kõik vähemalt 20 punkti;
3. Merit Laidroo, Keit Toom, Leelo Rand, Madis Masso, Jaak Asser ja Ranal Saron, kes kõik suutsid vähemalt ühe ülesande enam-vähem veatult lahendada.

B. Kuigi mitmed ülesanded jäid materjali mõistmise taha, esines siiski liiga palju arvutus- ja lohakusvigu. Nende vältimiseks on minu kogemuse kohaselt (nii õppejõu kui üliõpilasena) vaid üks meetod: iseseisvalt (või rühmana) teatud arv ülesandeid läbi lahendada.

C. Kontrolltöö tulemused on ümardatud (ülespoole) lähima poole punkti täpsuseni.

D. Püüdke alati oma tõestuse iga sammu põhjendada nii, et motiveeritud esmakursuslane (ca. kaks nädalat ülikoolistaaži ja 12 aastat keskkooliharidust) teist aru saaks. Vastasel korral ei ole tavaliselt teie (isegi õigest) lahendusest kindlakstehtav, kas te tegelikult saate asjadest aru ja jätate mingid sammud vahele, või olete endale teatud valemlikud laused pähe õppinud ja kombineerite nüüd neid.

E. Veel kord tähistustest. Piirväärtuse märgi lim all tähistatakse koonduvust noolega $\rightarrow$, mitte võrdusega $=$ või järelduvusega $\Rightarrow$.

F. Kursuse poliitika on selline, et ei ole hea kasutada laiendatud reaalarvude aritmeetikat ja kirjutada arvutuste sees $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\infty \cdot \infty$, jne. Näiteks peab kirjutama $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, mitte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\infty} = 0$. Seejuures suurused $\frac{0}{0}, 1^{\infty}, \infty - \infty$ jne. ei ole isegi mitte laiendatud reaalarvud, vaid määramatuse tüübid (piirväärtusena saavad viimased põhimõtteliselt olla mistahes reaalarvud, $\pm\infty$ või isegi üleüldse mitte leiduda, ja seda, millise juhuga parajasti tegu on, tuleb iga konkreetse piirväärtuse korral eraldi uurida).

G. Juur-, logaritm- ja trigonomeetrilised funktsioonid ei ole aditiivsed ega multiplikatiivsed, st. üldiselt $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a}$, $\tan(a \cdot b) \neq \tan a \cdot \tan b$, $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$, jne.

H. Kui te teisendate murdu kujul $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, siis $ad \leq bc$ kehtib vaid juhul, kui b ja c on samamärgilised. Murdavaldiste ristkorrutamisel tuleb alati uurida, milline on läbikorrutamisel kasutatava suuruse märk ja kas ei teki nulliga jagamist.

I. Piirväärtuse märgi all tuleb olla väga ettevaatlik osaliselt piirile minekuga. Muidu võivad tekkida umbes sellised "tõestused":

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} (x \cdot 0) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0.$$

J. Kommentaare ülesannete kaupa:

1. Ülesanne osutus küllaltki keeruliseks, seda just oma väidete tõestamise osas. Õiged vastused $\min X$ ei leidu, $\max X = -\frac{1}{2}$, $\inf X = -1$ ja $\sup X = -\frac{1}{2}$ olid enamusel küll leitud, aga mitte korralikult ära põhjendatud. Iga õige vastus oli väärt 0,5 punkti. Tõestamisel tuli täpselt järgida praktikumis tehtud näidislahendusi, näiteks $\min X$ jaoks näidata, et igast hulga X elemendist leidub väiksemaid hulga X elemente (või kasutada $\inf X = -1 \notin X$); $\max X$ jaoks algebraliselt ära põhjendada, miks $-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3n-1} - 1$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral; meenutada, et $\sup X = \max X$; ja teha läbi kas definitsioonile või loengukonspekti lausele 1.3 toetuv tõestus $\inf X = -1$ jaoks.

Paljud kirjutasid üldsõnalisi põhjendusi või üritasid midagi teha piirväärtustega. Kuna meil ei ole loengus tõestatud või viidatud vastavatele (ainult monotoonsete jadade korral kehtivatele!) omadustele, siis selleks oleks olnud vaja esiteks sõnastada need teoreemid või laused, mida te kasutada püüate, ja siis algebraliselt näidata, et tegu on tõepoolest rangelt monotoonse jadaga.

Praktiliselt mitte keegi ei toonud eraldi välja, et $-\frac{1}{2} \in X$, mis on vajalik suurima elemendi definitsiooni rahuldamiseks. Mõned asendasid maksimumi/miinimumi/infiimumi/supreemumi definitsioonis mitteranged võrratused $\leq$ rangete võrratustega $<$, mis on väär (saadav definitsioon on kasutu). Miinimumi uurimisel väga mitmed ei põhjendanud, miks peab kehtima võrratus $\frac{1}{3n-1} - 1 \leq \frac{1}{3(n+1)-1} - 1$ (-0,25 punkti). Kasutati ka kummalisi tähiseid $X_{\min}, X_{\max}, X_{\inf}, X_{\min}$ korrektsete $\min X, \max X, \inf X, \sup X$ asemel.

2. Kõige lihtsam ja kõige paremini lahendatud ülesanne. Siin oli peamiseks raskuseks õige definitsiooni kirjapanemine, kõige kummalisem lahendusse kirjutatud definitsioon oli niisugune (autorit siinkohal ei maini):

$$\lim_{x\to 1} \frac{3}{(x-1)^2} = \infty \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : |x-1| > \varepsilon \Rightarrow |\frac{3}{(x-1)^2} - \infty| > \delta.$$

Samuti esines väga palju valepidiseid implikatsioone (tarvilikkus $\Rightarrow$ või isegi tühi koht piisavuse $\Leftarrow$ asemel) ja ikkagi suudeti mõnikord $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ küljest absoluutväärtuse märgid ära kaotada (viimasel juhul kaotati 1 punkt).

3. a) Õige lahendus:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1}{3 - x + 7x^2\sqrt[3]{x^3+3x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1 - \frac{3x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{7x^2x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}{x^3}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^2} + 7\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{1 - 0 + 0 + 0}{0 - 0 + 7\sqrt[3]{1+0}} = \frac{1}{7},
\end{aligned}$$

sest $|x| = x$ kui $x \to \infty$.

Probleemideks olid nii lugejas kui nimetajas x^3 ette toomine (toodi näiteks $\frac{x^3}{x^2}$), lugejas $|x|$ sissetoomine ja sellest uuesti vabanemine ning üleüldse lugejas ja nimetajas esinevate juurt sisaldavate murdudega opereerimine.

3. b) Õige lahendus:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{x^3+1} - 1)\tan(2x+1)}{x\ln(1+2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} \cdot \tan(2\cdot 0 + 1)}{2x^3} = \frac{\tan 1}{6},$$

kasutades ekvivalentse $\sqrt[n]{y+1} - 1 \sim \frac{y}{n}$, kui $y \to 0$ (praegu $n = 3$ ja $y = x^3 \to 0$, kui $x \to 0$) ning $\ln(1+z) \sim z$, kui $z \to 0$ (praegu $z = 2x^2 \to 0$, kui $x \to 0$).

Siin ei tohtinud kasutada (miinus 1 punkt) ekvivalentsi $\tan(2x+1) \sim 2x+1$, sest juhul $x \to 0$ ei kehti $2x+1 \to 0$ (tegelikult $2x+1 \to 1$). Kui mõnda ekvivalentsi kasutati õigesti, aga seda ei kirjutatud kusagile välja, läks kaduma á 0,25 punkti. Samuti peab tegelikult iga ekvivalentsi ja muutujavahetuse korral uurima, mis muutub piirprotsessis (nt. võttes $y = \frac{x+1}{-4}$, kui $x \to \infty$, saame, et $y \to -\infty$).

3. c) Õige lahendus:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2}+x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2}+x)(\sqrt{x^2+2}-x)}{\sqrt{x^2+2}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}-x} \\
&= \lim_{y\to\infty}\frac{2}{y} = 0,
\end{aligned}$$

kus $y = \sqrt{x^2+2} - x \to \infty$, kui $x \to -\infty$.

Siin me ei saa otse midagi arvutada, sest tegu on $\infty - \infty$ tüüpi määramatusega. Kui tuua sulgude ette suurus x, siis saab meil olema $\infty \cdot 0$ tüüpi määramatus, mis EI OLE võrdne nulliga.

3. d) Õige lahendus:

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = \lim_{y\to0^+}\frac{1}{y} = +\infty,$$

kus $y = x^2 + \frac{1}{x} > 0$, kui $x < -1$, seega $y \to 0^+$.

Praktiliselt kõigist lahendustest oli puudu kontroll, kas $x^2 + \frac{1}{x} > 0$ või $x^2 + \frac{1}{x} < 0$ (sellest tuleb sisse erinevus parempoolse piirväärtusega). Selliste suuruste korral on oluline teada, et $\lim\limits_{y\to0^+}\frac{1}{y} = +\infty$, aga $\lim\limits_{y\to0^-}\frac{1}{y} = -\infty$.

Mõnikord jagati lugejat ja nimetajat x^3-ga, aga jäeti seejärel ikkagi uurimata, millised võivad olla lugeja ja nimetaja märgid. Teinekord leiti, et $x^2 + \frac{1}{x} \to 1 + 1 = 2$.

3. e) Õige lahendus:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{3x-2} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-4}{x+1}\right)^{3x-2} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x+1}\right)^{3(x+1)-5}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{4}{x+1}\right)^{x+1}\right)^{3}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x+1}\right)^{-5}\\
&= e^{-4\cdot 3}\cdot 1^{-5} = \frac{1}{e^{12}},
\end{aligned}
$$

kasutades ekvivalentsi $(1+\frac{k}{y})^{my} = e^{km}$ protsessis $y = x+1 \to \infty$.

Mõnikord püüti siin jälle väita, et $1^{\infty} = 1$, mis ei kehti. Kasutatavale seosele $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{m}{x}} = e^{km}$ ei viidatud (-0,5 punkti). Teinekord sai see seos tõestuse sees väära kuju $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{m}{x}} = km$ või isegi $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{m}{x}} = 1^{km}$. Tihti ei põhjendatud võrdust $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x+1}\right)^{-5} = 1$ (-0,5 punkti).

4. Õige lahendus:

$$
\begin{aligned}
&f(1) = 1+3 = 4,\\
&\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x+3 = 1+3 = 4,\\
&\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x+1)^2 = (1+1)^2 = 4,
\end{aligned}
$$

järelikult $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ja funktsioon f on nii vasakult kui paremalt pidev. Kuna mõlemapoolsed piirväärtused langevad kokku ja on võrdsed funktsiooni väärtusega $f(1) = 4$, siis on see funktsioon ka pidev.

Praktiliselt kõik lahendajad jätsid ära võrdused $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x+3$ ja $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1)^2$, mistõttu ei olnud tuvastatav, kuidas ülejäänud tegevus on seotud funktsiooniga f. Sellise vea hind oli 0,25 punkti. Ka leiti, et $f(1) = (1+1)^2$, mis on esiteks vale ja teiseks pidevuse näitamise seisukohast tegelikult kahjulik.

Mitmel juhul jäi millegipärast ära (mõlemapoolse) pidevuse kontroll, või oli see puudulik.

Jooniselt ei olnud tihti aru saada, et vahemikus $[1, 2]$ on tegu parabooliga, mille eest võis kaotada 0,5 punkti. Mõnel üksikul juhul joonistati graafik(ud) ka väljapoole lõiku $[0, 2]$.