Sügis 2014

Märkusi matemaatilise analüüsi 2. kontrolltöö kohta:

A. Tulemuste osas oli vahe esimese kontrolltööga minimaalne. Oli küll mitu inimest, kes kas oluliselt parandasid või, vastupidi, madaldasid oma eelnevat tulemust, aga üldiselt olid punktid lausa üllatavalt samasugused (kuni poole punkti täpsusega identse kogusummani välja). Kuna põhimõtteliselt märgib 2. kontrolltöö umbes poolte praktikumi punktide saamise piiri (arvestades ka järeltööga), siis oma tulemuse üle tasuks veidi mõelda. Kui teil on praeguseks praktikumist kogutud alla 30 punkti, siis on teie eksamile pääsemine vägagi küsitav. Realistlikult võttes ei ole aga ka nõutav minimaalne 60 punkti üldjuhul piisav eksami positiivseks sooritamiseks.
Kontrolltöö tegijatest väärivad äramärkimist:

1. Jälle parima tulemusega Mattias Nurk, kes sai seekord siiski ühe punkti vähem;
2. Anton Matskevitš, Helen Pajor ja Mariana Urvik, kes kõik saavutasid 21,5 punkti;
3. Ingrid Sarap, Henry Maalinn, Madis Masso ja Tõnis Tenno, kes kõik said vähemalt 50% rohkem punkte, kui 1. kontrolltöös;
4. Keit Toom, kes vormistas oma töö väga põhjalikult ja ilusasti.

B. Küllaltki hästi osati leida tuletisi, hoopis halvemini mõisteti funktsiooni uurida. Sisuliselt ei ole enamuse lahendamisoskused keskkooliga võrreldes eriti paranenud ja kõik vead, mida ma hoolega vältisin oma funktsiooni uurimise näitefailis, tehti peaaegu 100% ulatuses ära.

C. Kontrolltöö tulemused on jälle ümardatud (ülespoole) lähima poole punkti täpsuseni.

D. Ma ei oska ikka veel mõtteid lugeda. Seetõttu ei tea ma näiteks l'Hôpitali reegli korral kirjutist $\overset{\frac{0}{0}}{=}$ nähes, kas te olete selle $\frac{0}{0}$ sinna juhuslikult pannud (teine variant on $\frac{\infty}{\infty}$, seega õnnestumise võimalus on tervelt 50%) või selle tegelikult välja arvutanud. Pange alati TERVE oma mõttekäik kirja.

E. Ärge kasutage laiendatud reaalarvude aritmeetikat ja kirjutage

$$\lim_{n} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} = \frac{0 - 0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0}.$$

Kui muud üle ei jää, siis ma jätan edaspidi sellise kirjutise kohalt lahenduse lugemise pooleli ja annan punkte vaid sinnamaani. Mida võib teha, on kirjutada stiilis "... on $\frac{\infty}{\infty}$ tüüpi määramatus."

E. Hindamisskeem oli järgmine:

1. 5 punkti,

2. a) 4 punkti,

2. b) 4 punkti,

3. a) 4 punkti,

3. b) 4 punkti,

4. 1) 0,25 punkti,

4. 2) 0,25 punkti,

4. 3) 1 punkt,

4. 4) 2 punkti,

4. 5) 1,5 punkti,

4. 6) 2 punkti,

joonis 2 punkti.

J. Kommentaare ülesannete kaupa:

1. Näidislahendus:

$$\lim_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{-2}}{x - (-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{\frac{2+x}{2x}}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot (-2)} = -\frac{1}{4}.$$

Erilisi probleeme selle ülesandega ei olnud, kuigi oma elu võis teha veidi keerulisemaks, kasutades tuletise piirväärtust kujul $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x}$.

2. a) Näidislahendus:

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^{\arctan 5x}}{\ln\tan(x+5)}\right)' &= \frac{e^{\arctan 5x}\cdot\frac{1}{1+(5x)^2}\cdot 5\cdot\ln\tan(x+5)-e^{\arctan 5x}\cdot\frac{1}{\tan(x+5)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x+5)}\cdot 1}{\ln^2\tan(x+5)}\\ &= e^{\arctan 5x}\left(\frac{5}{(1+25x^2)\cdot\ln\tan(x+5)}-\frac{2}{\sin(2(x+5))}\right).\end{aligned}$$

Probleeme tekitasid arkustangensi tuletise valemi teadmine, liitfunktsiooni tuletise leidmisel mõne etapi vahelejätmine (näiteks nimetajas teguri 5 ärajätmine) ja arvutusvead.

2. b) Näidislahendus: kuna ülesanne toimub niikuinii eeldusel $x-1>0$, sest muidu ei ole jagatis või astme-eksponentfunktsioon $(x-1)^(x+1)$ alati määratud, siis $f(x)>0$ ja $|f(x)|=f(x)$. Seega

$$\begin{aligned}f'(x) &= f(x)\cdot(\ln|f(x)|)'=\frac{x^x}{(x-1)^{(x+1)}}\cdot(x\ln x-(x+1)\ln(x-1))'\\ &= \frac{x^x}{(x-1)^{(x+1)}}\cdot\left(\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)-\left(1\cdot\ln(x-1)+(x+1)\cdot\frac{1}{x-1}\right)\right)\\ &= \frac{x^x}{(x-1)^{(x+1)}}\cdot\left(\ln\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x-1}\right).\end{aligned}$$

Mõnikord ei osatud siin üldse logaritmilise diferentseerimise võtet, teinekord leiti, et $\ln f(x)=\frac{x\ln x}{(x+1)\ln(x-1)}$ ja diferentseeriti jagatise tuletise valemi abil. Oli isegi lahendajaid, kes arvasid, et $(x^x)'=x\cdot x^{x-1}$. Vaikimisi eeldamine, et $|f(x)|=f(x)$ ilma lisaselgitusteta oli väärt -0,25p.

3. a) Näidislahendus: jälle $(1+\ln x)^{\frac{1}{x-1}}>0$ (muidu tekib negatiivsete arvude juurimine) ja $|(1+\ln x)^{\frac{1}{x-1}}|=(1+\ln x)^{\frac{1}{x-1}}$, seega

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(1+\ln x)^{\frac{1}{x-1}} &= e^{\lim_{x\to 1}\ln\left((1+\ln x)^{\frac{1}{x-1}}\right)}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\ln x)}{x-1}}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{1+\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}}\\ &= e^{\frac{1}{1+\ln 1}\cdot\frac{1}{1}}=e^1=e,\end{aligned}$$

sest $\lim_{x\to 1}\ln(1+\ln x)=\ln(1+\ln 1)=\ln 1=0=1-1=\lim_{x\to 1}(x-1)$ ja me saame kasutada l'Hôpitali reeglit.

Tüüpiliselt jäeti põhjendamata, miks l'Hôpitali reeglit võib kasutada, või tehti seda väga minimaalselt (-1p).

3. b) Lihtne vastus oleks, et $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0} 0=0$, sest $\sin x \sim x$ protsessis $x \to 0$. Aga ülesanne kohustab meid kasutama l'Hôpitali reeglit:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1\cdot\sin x+x\cdot\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-(-\sin x)}{\cos x+1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2\cdot 1-0\cdot 0}=\frac{0}{2}=0,
\end{aligned}$$

sest $\lim_{x\to 0}(x-\sin x)=0-0=0=0\cdot 0=\lim_{x\to 0} x\sin x$ ja $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=1-1=0=0-0\cdot 1=\lim_{x\to 1}(\sin x-x\cos x)$ ning järelikult võime me kasutada l'Hôpitali reeglit kaks korda järjest.

Jälle jäeti põhjendamata või põhjendati väga vähe, miks l'Hôpitali reeglit võib kasutada (-1p).

4. Siin tehti kahjuks ära väga palju neist vigadest, mida ma lootsin vältida oma ülesande 91. h) näidislahendusega. Kindlasti andis mingil määral tunda ka ajapuudus. Korrekte lahendus oleks selline:

1) Kuna nulliga jagada ei saa, aga muid funktsiooni avaldises tehtavaid tehteid võib sooritada mistahes reaalarvudega, siis antud funktsiooni määramispiirkonnaks on $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

2) Tegu on elementaarfunktsiooniga (polünoomfunktsioonide jagatis), mis on oma määramispiirkonnas $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ pidev. Kuna

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3}{x-2}=\lim_{y\to 0^-}\frac{y^2+2y+1}{y}=-\infty$$

ja

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3}{x-2}=\lim_{y\to 0^+}\frac{y^2+2y+1}{y}=+\infty,$$

sest $y^2+2y+1\to 1$ kui $y\to 0$, siis on funktsioonil f punktis -2 teist liiki katkevuspunkt.

3) Analüüsime, millal $f(x)>0$, $f(x)=0$ ja $f(x)<0$. Kuna ratsionaalmurd on võrdne nulliga parajasti siis, kui tema lugeja on võrdne nulliga ja

nimetaja ei ole null, siis $f(x) = 0$ parajasti siis, kui $x^2 - 3 = 0$ ja $x - 2 \neq 0$ ehk $x = \pm\sqrt{3}$. Avaldis $f(x) = \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x-2}$ muudab märki punktides 2,$\sqrt{3}$ ja $-\sqrt{3}$, sest siis tema üks tegur muudab oma märki ja teised jäävad samamärgilisteks. Punktist 2) teame, et suurte x väärtuste korral $f(x) > 0$. Kuna $2 > \sqrt{3} \approx 1,7$, siis $f(x) > 0$ parajasti siis, kui $f(x) > 2$ või $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ ning $f(x) < 0$ parajasti siis, kui $f(x) < -\sqrt{3}$ või $\sqrt{3} < x < 2$. Järelikult on otsitavateks nullkohtadeks punktid $(\sqrt{3}, 0)$ ja $(-\sqrt{3}, 0)$, positiivsuspiirkonnaks hulk $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (2, \infty)$ ja negatiivsuspiirkonnaks hulk $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$.

4) Fermat' teoreemi kohaselt võivad lokaalsed ekstreemumid esineda vaid funktsiooni f kriitilistes punktides, st. sellistes punktides x, kus $f'(x) = 0$ või $f'(x)$ ei eksisteeri. Leiame

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2-3}{x-2}\right) = \frac{2x(x-2) - (x^2-3)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 3)\cdot 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Uuesti $f'(x) = 0$ parajasti siis, kui $(x-3)(x-1) = 0$ ja $(x-2)^2 \neq 0$ ehk $x = 1$ või $x = 3$. Lisaks on meil võimalik kriitiline punkt 2, kus $f'(x)$ ei eksisteeri. Õnneks on arv 2 määramispiirkonnast väljas ja seetõttu ei saa seal ka mingit ekstreemumit olla. Kasutades jälle punktiga 3) analoogilist metoodikat (antud ratsionaalmurrul eksisteerib kolm punkti, kus märk võib muutuda, nimelt 1, 3 ja 2, aga viimasel juhul märk tegelikult ei muutu; lisaks $f'(4) = \frac{1\cdot 3}{2^2} > 0$) saame, et $f'(x) > 0$ parajasti siis, kui $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ ja $f'(x) < 0$ parajasti siis, kui $x \in (1, 2) \cup (2, 3)$. Seega on funktsioonil f RANGE kasvamispiirkond $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, RANGE kahanemispiirkond $x \in (1, 2) \cup (2, 3)$, RANGE lokaalne maksimum punktis $(1, 2)$ ning RANGE lokaalne miinimum punktis $(3, 6)$. Kuna alapunkti 2) põhjal on funktsioon f oma määramispiirkonnas tõkestamata, siis globaalseid ekstreemumeid ei ole.

5) Leiame esmalt

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\right)' = \frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x+3)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} \\ &= 2\frac{(x-2)^2-(x^2-4x+3)}{(x-2)^3} = 2\frac{x^2-4x+4-x^2+4x-3}{(x-2)^3} \\ &= \frac{2}{(x-2)^3}. \end{aligned}$$

Siit on lihtne näha, et $f''(x)$ muudab märki punktis 2 ja ei ole kunagi võrdne nulliga. Seega $f''(x) \geq 0$ kui $x \in (2,\infty)$ ja $f''(x) \leq 0$ kui $x \in (-\infty, 2)$, sest punkt 2 ei kuulu funktsiooni f määramispiirkonda. Kuna 2 on ka ainus kandidaat $f'(x)$ kriitiliseks punktiks ehk käänupunktiks, siis käänupunkte ei ole, funktsiooni f GRAAFIK on kumer piirkonnas $(-\infty, 2)$ ja nõgus piirkonnas $(2,\infty)$.

6) Alapunktis 2) me tegelikult leidsime, et funktsioonil f on püstasümptoot punktis 2. Kuna mistahes muus punktis $a \neq 2$ on f pidev, siis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$ ja seal ei saa olla püstasümptooti.

Vaatame, kas meil võib olla kaldasümptoote:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{3}{x^2})}{x^2(1-\frac{2}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1-0}{1-0} = 1,$$

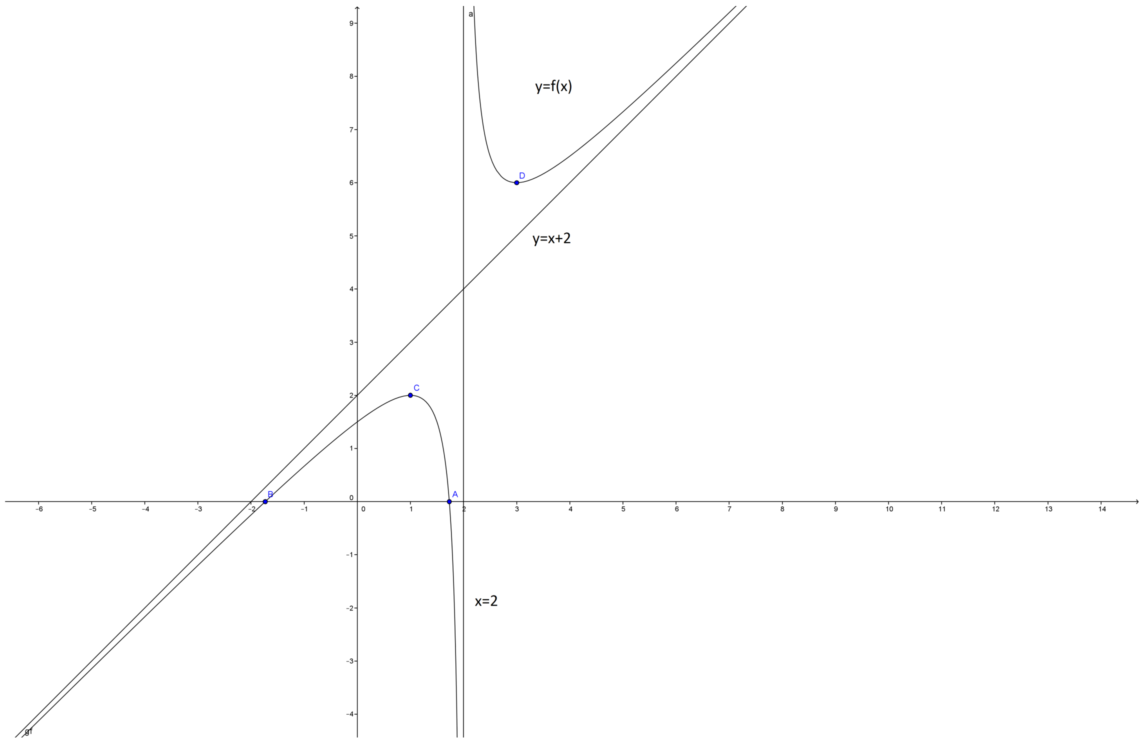
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1-0}{1-0} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-1\cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3-x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-1\cdot x = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 2,$$

sest piirväärtuste leidmisel ei kasuta me juhul $x \to \infty$ kusagil x positiivsust. Seega on meil nii $x \to \infty$ kui $x \to -\infty$ jaoks ühine kaldasümptoot $y = x + 2$.

Joonis) Joonisele tuleb kanda vähemalt nullkohad $-\sqrt{3}$ ja $\sqrt{3}$, lokaalne maksimum $(1, 2)$, lokaalne miinimum $(3, 6)$ ning asümptoodid $x = 2$ ja $y = x + 2$.



Tüüpvead:

4\. 2) Funktsiooni pidevuse põhjendamata jätmine (-0,15p).

4\. 3) Puudulikud põhjendused, miks ikkagi $f(x) > 0$ või $f(x) < 0$ (-0,5p, intervallmeetodi mainimine ja piltlik skeem andis ainult -0,25p).

4\. 4) Tuletise arvutamise vahelejätmine (-1p, kui tuletis "langes taevast"). Puudulik põhjendamine, miks $f'(x) > 0$ või $f'(x) < 0$ (-0,5p analoogiliselt eelmise alapunktiga). Võimaliku kriitilise punkti 2 ignoreerimine (-0,25p). Statsionaarsete punktide 1 ja 3 ekstreemumiteks kuulutamine (-0,25p) ilma kindlaks tegemata, kas nad on miinimumid või maksimumid (-0,25p). Kasvamis- ja kahanemispiirkonna ja ekstreemumite RANGUSE mittemainimine (-0,1p, kasvamispiirkond on meil juhul $f'(x) \geq 0$, situatsioonis $f'(x) > 0$ on tegu RANGE kasvamispiirkonnaga). Globaalsete ekstreemumite olemasolu uurimata jätmine (-0,25p).

4\. 5) Jälle puudulikud põhjendused $f''(x)$ märgi uurimisel (-0,5p). Teise tuletise arvutuskäigu vahelejätmine (-1p). Käänupunktide olemasolu puudulik uurimine (-0,25p, meil on jälle potentsiaalne käänupunkt punktis 2, mis tuleb välistada).

4\. 6) Püstasümptoodi korral ainult ühe piirväärtusega piirdumine (-0,25p, joonise tegemisel on see hädavajalik). Sama probleem kaldasümptoodi korral

(-0,5p, siin võib asümptoot $-\infty$-s isegi erinev tulla). Teiste püstasümptootide peale $x = 2$ mittevälistamine (-0,25p). Piirväärtuste "laest" leidmine (-0,5p).

4. Joonis) Vajalike andmete (nullkohad, ekstreemumid) joonisele mitte kandmine (-0,5p). Asümptootide puudumine (kuni -0,5p). Funktsiooni enda graafiku õigsus (kuni -1p).