Sügis 2014

Märkusi matemaatilise analüüsi 3. kontrolltöö kohta:

A. Töö ei läinud kahjuks hästi, kuigi tegu oli suhteliselt lihtsate ülesannetega (praktikumis oleme me harjutanud kordades raskemaid ja ka paljudes teistes rühmades tehti tööd tunduvalt paremini).
Kontrolltöö tegijatest väärivad äramärkimist:

1. üle kahekümne punkti saanud Anton Matskevitš ja Mattias Nurk, kelle tööd andsid põhjust arvata, et nad teemad tõepoolest enam-vähem valdavad ja vajadusel suudavad ka raskemaid ülesandeid lahendada;
2. Keit Toom, Martin Põhjakivi, Ingrid Sarap, Raina Liiva ja Jaak Asser, kes said kirja vähemalt pooled punktid ja kelle töödest paistis välja, et nad on ikkagi kontrolltööks õppinud.

B. Kontrolltöö tulemused on ikka ümardatud (ülespoole) lähima poole punkti täpsuseni.

C. Mõtete lugemise võimet ei ole mul endiselt. See ei takista lahendajatel sedasorti küllaltki krüptilist valemiteksti kirjutamast, millest nad ise 3 kuud tagasi tõenäoliselt üldse midagi ei mõistaks (á la ma pean ise mõistatama, et te üritate Leibnizi tunnust kasutada, või et tegu on ositi integreerimisega). Lisaks, praktikumis ja loengus mitteesinenud valemid vajavad alati tõestust.

D. Kommentaare ülesannete kaupa:

1. Näidislahendus: integreerime ositi, võttes $u = x$, $\mathrm{d}v = \cos\frac{x}{3}\mathrm{d}x$, kust $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ ja $v = 3\sin\frac{x}{3}$:

$$\int x\cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = 3x\sin\frac{x}{3} - \int 1\cdot 3\sin\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = 3x\sin\frac{x}{3} + 9\cos\frac{x}{3} + C.$$

Tüüpilised vead olid kordaja 3 mitmest kohast ärajätmine (-0,5 p) ja integreerimiskonstandi C äraunustamine (-0,5 p).

2. a) Näidislahendus: kui $t = \sqrt{x-1}$, siis $x = t^2 + 1$ ja $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$, kust

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{2\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{4t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^1 \left(\frac{t^2+1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= 4(t - \arctan t)\Big|_0^1 = 4 - \pi.\end{aligned}$$

Kõige probleemsemad kohad olid $\mathrm{d}x$ korrektne asendamine (sealhulgas integraali rajade muutumine) ja murrus $\frac{t^2}{1+t^2}$ lugejale ühe liitmine ning lahutamine. Diferentsiaalimärgi alla viimise võte nii siin kui ülesannetes 3 ja 4 valmistas samuti raskusi.

2. b) Näidislahendus: kuna $(-x)^{2014}\sin(-x) = x^{2014}(-\sin x) = -x^{2014}\sin x$, siis on meil tegu paaritu funktsiooniga ja

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^{2014}\sin x\right)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Lisaks $|x+1| \le 0$, kui $-\pi \le x \le -1$, ja $|x+1| \ge 0$, kui $-1 \le x \le \pi$, kust

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |x+1|\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{-1} |x+1|\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{\pi} |x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{-1} (-x-1)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{\pi} (x+1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-\pi}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{\pi^2}{2} - \pi + \frac{\pi^2}{2} + \pi - \frac{1}{2} + 1 = \pi^2 + 1.\end{aligned}$$

Järelikult

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^{2014}\sin x + |x+1|\right)\,\mathrm{d}x = 0 + \pi^2 + 1 = \pi^2 + 1.$$

Selles ülesandes oli raskusi nii paaritu funktsiooni tuvastamise (mõni püüdis seda teha terve integraalialuse funktsiooni jaoks) ja absoluutväärtuse õigesti kahe integraalina lahti kirjutamisega. Osutus ka, et peale algfunktsiooni leidmist oli väga lihtne arvutusvigu teha.

3. Näidislahendus:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{4\sqrt{2}}{2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{L\to\infty}\int\limits_{\sqrt{2}}^{L}\frac{4\sqrt{2}}{2+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to\infty}\int\limits_{\sqrt{2}}^{L}\frac{4\sqrt{2}\sqrt{2}}{2\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\\ &= 4\lim_{L\to\infty}\int\limits_{\sqrt{2}}^{L}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{L\to\infty}4\left(\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{L}\\ &= 4\lim_{L\to\infty}\left(\arctan\frac{L}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \pi.\end{aligned}$$

Üks levinud probleem oli selline kirjapilt: $4\left(\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\infty}$. Me tahame kohe algusest peale mõelda piirväärtusele, mitte jätta lõpmatust rajasse ja lõpuks sealt piirväärtust leiutama hakata või isegi kirjutada $\arctan\infty$. See on sama probleem, mis lõpmatustega tehete tegemisega.

4. Näidislahendus:

$$V=\pi\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{1}^{2}\frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x=4\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{2}=4\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right)=2\pi.$$

See ruumala 2π on muuseas eukleidilise ruumi $\mathbb{R}^3$ ühikkuupides, st. hulkades $[0,1]^3 = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$. Üks levinum probleem oli valemist ruudu äraunustamine, st. leiti $\pi\int\limits_1^2 \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$.

5. Näidislahendus: tegu on vahelduvate märkidega reaga kujul

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{2n^2+2n-3}}.$$

Tähistame $a_n=\frac{1}{\sqrt{2n^2+2n-3}}$. Iga $n\in\mathbb{N}$ korral kehtivad $\sqrt{2n^2+2n-3}\geq 0$, $\sqrt{2(n+1)^2+2(n+1)-3}\geq\sqrt{2n^2+2n-3}$ (sest $2n^2+4n+2+2n+2-3\geq 2n^2+2n-3$, ehk $4n+4\geq 0$) ja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2+2n-3}}=0.$$

Järelikult oleme näidanud, et $a_n\geq a_{n+1}\geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ja seetõttu Leibnizi tunnuse kohaselt vahelduvate märkidega rida $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ehk vaadeldav rida koondub. Ta ei koondu absoluutselt, sest

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n^2+2n-3}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{2+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}} = \frac{1}{2} \in (0,\infty)$$

ja seetõttu positiivsete ridade II võrdluslause põhjal rida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^2+2n-3}}$ koondub samaaegselt reaga $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, mis hajub (harmooniline rida). Järelikult uuritav rida koondub tingimisi.

Oli tunda, et ridade koonduvuse uurimise metoodika on ikkagi väga võõras ja paljuski toetuti näidiskontrolltööle, mitte üldpõhimõtetele. Peamiseks probleemiks oli siin KÕIGI Leibnizi tunnuse NELJA eelduse DETAILNE kontroll, mida tegid väga vähesed. Leibnizi tunnus muuseas ei ole koonduvuseks tarvilik (välja arvatud osa $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$).

6. Näidislahendus: tähistame $a_n = \frac{2^n}{n}$, st. tegu on reaga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$. Siis

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{2}{1} = 2$$

ja seega $R = \frac{1}{2}$. Cauchy-Hadamard'i teoreemi kohaselt

$$\left(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right) \subseteq A \subseteq X \subseteq \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Otspunktis $x = \frac{1}{2}$ on meil arvrida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(\frac{1}{2}-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2(-\frac{1}{2})\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

See on nn. vahelduvate märkidega harmooniline rida, mis koondub Leibnizi tunnuse põhjal, kuna $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} \geq 0$ (sest $n+1 \geq n$) ja $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. See koondumine on tingimisi, sest harmooniline rida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajub.

Otspunktis $x = \frac{3}{2}$ on meil uuesti harmooniline rida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(\frac{3}{2}-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, mis ikka hajub.

Järelikult $R = \frac{1}{2}$, $A = \left(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right)$ ja $X = \left[1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right)$.

Esimene kitsaskoht oli R arvutamisel $(x-1)^n$ sisse jätmine. Teine tüüpiline probleem oli koonduvusvahemiku juures $a = 1$ arvestamata jätmine, st.

võeti $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ või isegi $\left(-\frac{1}{2} - 1, \frac{1}{2} - 1\right)$, mistõttu uuriti ka valesid "otspunkte". Cauchy-Hadamard'i teoreemi mainisid vähesed ja nii mõnigi kord võeti kohe, et $X = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right)$.