Sügis 2014

Märkusi matemaatilise analüüsi 3. kodutöö kohta:

A. Kirjutama ei ole vahepeal keegi juurde õppinud, ainult Jaak Asser ja Ranal Saron jätkavad oma eelnevat head tava. Mida te oma lõputöösse kirjutada kavatsete, samuti lehekülgede kaupa valemeid ja krüptilisi lausekatkeid?

Kogu töö on jälle summarselt hinnatud 0,5 punkti täpsusega. Kahjuks õnnestus mul seetõttu kasutada vaid nelja "hinnet": 2; 2,5; 3 ja 3,5. See märgib tugevat tagasiminekut varasemaga võrreldes ja peaks andma signaali, et kontrolltööks valmistumiseks tuleb veel tõsiselt tööd teha.

Paremate lahendajate hulgast väärivad äramärkimist Jaak Asser (osad 3. ülesandest), Keit Toom (1. ülesanne ja samuti osad 3. ülesandest), Martin Põhjakivi (2. ülesanne) ja Art-Norman Reins (1. ülesanne).

Mulle jäi kodutöid lugedes tegelikult mulje, et absoluutselt mitte keegi ei olnud lugenud minu näiteülesannet 91. h), sest kõik seal hoolega välditud peenemad vead tehti kodutöös peaaegu 100% ulatuses ära.

B. Kõiki esitatud väiteid tuleb põhjendada, ükskõik kui triviaalsed need ei tundu. Ma nimelt ei oska teie mõtteid lugeda ja paljudel juhtudel on võimalik väita õigesti ka pooljuhuslikult (K: Miks võib kasutada l'Hôpitali reeglit? V: (50% tõenäosus, et vastus on õige) Sest tegu on määramatusega $\frac{0}{0}$.). Ning vigu on nii samuti väga lihtne teha (see käib eriti kontrolltöö kohta). Tüüpiliselt võtsin ma põhjenduse puudumise eest maha 0,1p.

C. Veel kord tähistusest: siin kursuses taunitakse lõpmatuste aritmeetika kasutamist, st. kirjutamist

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x^2}=\frac{0}{0}$$

jmt.

D. Ikka kasutatakse astmefunktsiooni diferentseerimisel liitfunktsiooni diferentseerimise valemit, pöördfunktsiooni diferentseerimisel jagatise tuletise valemit ja taolisi ebaefektiivseid võtteid. Kontrolltöö ajal te lihtsalt kaotate sellise tegevuse tõttu hädavajalikke minuteid.

E. Hindamisskeem oli järgmine: 1. ülesanne $2 \times 0,5$p, 2. ülesanne 1p, 3. ülesande osad 1)–4) á 0,25p, osad 5)–7) ja joonis á 0,5p.

F. Kommentaare ülesannete kaupa:

1. Paljud jätsid põhjendamata, miks l'Hôpitali reeglit kasutada tohtis, või märkisid ainult võrduse kohale $\frac{0}{0}$ vms. Selle eest võtsin maha á 0,1p. Ei ole ju raske neid arvutusi kirja panna.

2. Taylori rida on VÕRDNE esialgse polünoomiga, nt.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^\xi \cdot x^4}{24},$$

ligikaudse võrduse märki kasutatakse Taylori POLÜNOOMI korral, nt.

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Suuri raskusi oli absoluutse vea hindamisega, mille eest võis kokku saada 0,25p. Näiteks kui ξ on 0 ja x vahel ning $|x| \leq \frac{1}{2}$, siis $|\xi| < \frac{1}{2}$ (miks?) ja järelikult

$$\left|\frac{4x^3}{6(\xi+2)^3}\right| < \frac{4 \cdot \frac{1}{8}}{6(2-\frac{1}{2})^3} = \frac{2}{81}.$$

Murd nimelt suureneb siis, kui murru nimetaja VÄHENEB.

Taylori rea korral ei räägita Lagrange'i VALEMIST, vaid Taylori reast jääkliikmega Lagrange'i kujul. Lagrange'i valem võib tähendada mitut asja, millest kuulsaim on tema interpolatsioonivalem, mis on küll temaatikalt veidi sarnane Taylori reale, aga ei ole sellega otseselt seotud.

3. Palju kasutati mingisuguseid mittestandardseid tähiseid nagu $\breve{X}$, $X\uparrow$ jne. Kui te seda teete, siis esmalt defineerige oma tähistused. Muul juhul tuleb kasutada loengu terminoloogiat: "nõgususpiirkond", "kasvamispiirkond" jne.

1) Määramispiirkonna leidmist tuleb kuidagi põhjendada. Nulliga jagamise vältimine on veel arusaadav, aga logaritmid ja juurimine vajavad juba analüüsi.

2) Paarsuse näitamiseks ei piisa sellest, et $f(x)$ ja $-f(-x)$ või $f(-x)$ "näevad erinevad välja". Näiteks funktsioonid $\frac{\pi}{2}$ ja $\arctan x + \operatorname{arccot} x$ ei ole ka "välimuselt" sarnased, aga on sellest hoolimata alati võrdsed. Vaja on leida sellised arvud x_0 ja x_1, et $f(x_0) \neq f(-x_0)$ ja $f(x_1) \neq -f(-x_1)$, näiteks $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ korral $x_0 = x_1 = 2$, sest $f(2) = 4 \neq -\frac{4}{9} = -f(-2)$ ja $f(2) = 4 \neq \frac{4}{9} = f(-2)$.

3) Pidevust oli tarvis põhjendada stiilis "antud funktsioon on pidevate funktsioonide (näiteks elementaarfunktsioonide) liitfunktsioon". Põhjendamata õige väide andis 0,1p.

4) Väga palju jäeti põhjendamata, kuidas leiti piirkonnad, kus $f(x) > 0$ ka $f(x) < 0$. Murdavaldiste kohta käivad pildid on abivahend ja ei päästa teid selgitamisvajadusest (aga pildi olemasolul võtsin ma maha vaid 0,05p).

5) Jälle oli põhjendamata kasvamis- ja kahanemispiirkondade leidmine. Kui tuletise leidmine oli vahele jäetud (isegi kui kirjapandud tuletis oli õige), siis võtsin maha 0,2p, sest käesoleva kodutöö mõte seisnes suuresti teie tuletise leidmise oskuse proovilepanekus.

   Kriteerium $f'(x) = 0$ ei ole ei piisav ega tarvilik ekstreemumi olemasoluks. Näiteks funktsiooni $f(x) = |x|$ miinimumpunktis 0 tuletis sootuks puudub, samas funktsioonil $f(x) = x^3$ on $f'(0) = 0$, aga selles punktis ei ole miinimumi. Fermat' teoreemi tuleb mõttega kasutada, st. identifitseerida kriitilised (sh. statsionaarsed) punktid ja neid siis analüüsida.

   Tüüpiliselt leiti siin RANGED kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning nimetati neid kasvamis- ja kahanemispiirkondadeks (mis tegelikult sisaldavad lisaks ka statsionaarseid punkte). Mitte keegi ei uurinud ekstreemumite globaalsust ja üldse globaalsete ekstreemumite olemasolu (-0,1p). Mõned ei vaevunud isegi leitud ekstreemumi korral kindlaks tegema, kas tegu on miinimumi või maksimumiga.

6) Põhjendused olid jälle puudulikud funktsiooni GRAAFIKU kumerus- ja nõgususpiirkondade leidmisel. (Funktsiooni kumerus ja nõgusus on vastupidised tema graafiku omadega). Teise tuletise leidmise sammude vahelejätmine andis -0,2p.

   Jälle, $f''(x) = 0$ ei ole ei piisav ega tarvilik käänupunkti olemasoluks. Tuleb leida $f'(x)$ kriitilised punktid ja neid analüüsida.

   Käänupunkt on tasandi punkt (nt. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{9})$), käänukoht on x-telje koordinaat (nt. $-\frac{1}{2}$). Käänupunktis peab funktsioon olema määratud ja pidev.

   Funktsiooni kumerus- ja nõgususpiirkond sisaldab käänupunkte, nt. $f(x) = x^2$ korral on nõgususpiirkonnaks $\mathbb{R}$, mitte $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7) Peaaegu keegi ei põhjendanud, miks kõik püstasümptoodid on leitud (funktsiooni pidevus!). Kaldasümptootidest leiti paljudel juhtudel vaid parempoolne, st. vaadeldi vaid juhtu $x \to \infty$, aga mitte enam $x \to -\infty$.

Joonis: Kui joonisel ei olnud asümptoote, võtsin maha 0,2p. Enamusel ei olnud joonisele kantud kogu eelnevalt leitud informatsiooni: ekstreemumeid, käänupunkte, nullkohti jms. Kontrolltöö ajal graafikut skitseerides on see hädavajalik info.

Mõnikord ületasid funktsioonide graafikud oma maksimume, kaugenesid asümptootidest, ei muutnud kumerust/nõgusust käänupunktis jmt. veidrusi. Sõltuvalt vea tõsidusest läks selle eest kaduma $\sim$ 0,1p.