Sügis 2014

Märkusi matemaatilise analüüsi 5. kodutöö kohta:

A. Lühikokkuvõte: esimesed kaks ülesannet olid tehtud suhteliselt hästi, teised kaks mitte nii hästi. Kolm korda võib arvata, kumba sorti ülesanded tulevad 3. kontrolltöösse. Kõige lihtsam meetod oma puudujääke näha ja kontrolltööks õppida on võrrelda oma tööd 23. praktikumi näidislahendusega.

B. Kogu töö sai hinnatud ikka 0,5 punkti täpsusega. Tulemuste kohta midagi väga positiivset öelda ei saa, aga kiitust väärivad 1. Mattias Nurk, kes sai ainsana 4,5 punkti, 2. Raina Liiva, kes sai 4 punkti ja esitas kenasti kommenteeritud töö, 3.-4. Henri Maalinn ja Mari-Liis Oruste, kes said ka 4 punkti (ja Mari-Liis samuti ilusasti kommenteeris oma tegevust), 5. Keit Toom, kes sai 3,5 punkti, aga esitas väga hästi kommenteeritud töö, 6. Anton Matskevitš, kes sai samuti 3,5 punkti ja hoidis teistega võrreldes kõvasti paberit kokku.

C. Jälle, *tõestuseta* valemeid, mida ei ole olnud kas loengus või praktikumis, vajavad tõestust, nt.

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{a^n}{b^n} = \frac{b^{-m}(a^{m+1} - b^{m+1})}{a-b}.$$

Lisaks eelnevale, iga kord kui te mingit tulemust (teoreemi, tunnust) kasutate, viidake sellele. Seda võib teha nimeliselt (Cauchy tunnus), sisuliselt (koonduva rea üldliige hääbub) või sõnastada terve tulemus kusagile puhtandi algusesse ja viidata sinna. Vastasel juhul ma ei tea, kas te kasutate ikka õigeid asju või niisama lõpetate oma lause näiteks sõnadega "seega rida koondub absoluutselt" lootuses, et äkki läheb täppi.

Lõpuks, kui te kasutate l'Hôpitali reeglit, siis pidage meeles, et see ei kehti mitte jadade, vaid funktsioonide jaoks. Seega $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$, sest $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0$ funktsiooni $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ korral ja Heine kriteerium ütleb, et see piirväärtus on sama kõigi jadade $f(n)$, $n \to \infty$, jaoks.

D. Hindamisskeem: 1. ja 2. ülesande kõik alamülesanded à 0,5 punkti; 3. ülesanne 1 punkt, 4. ülesanne 1,5 punkti.

E. Kommentaare ülesannete kaupa:

1. See ülesanne oli peaaegu kõigil ilusasti lahendatud.

2. Siin oli vaja kasutada a) mõnda võrdluslauset ja harmoonilise rea koonduvuse kriteeriumi (lause 9.7); b) Cauchy tunnust (teoreem 10.1); c) koonduvuseks tarvilikku tunnust (lause 9.3).

Osas a) õnnestus ühel lahendajal komistada selle asjaolu otsa, mida ma praktikumis põgusalt mainisin: tingimisi koonduvat rida võib ümber järjestada nii, et ta koondub mistahes reaalarvuks või isegi $\pm\infty$-ks. Teisisõnu, lõpmatus summas tohib ainult lõpliku arvu liikmete järjekorda muuta, muidu võib teie analüüs vääraks osutuda.

Osa b) oli üldiselt hästi lahendatud. Aga ma tuletan meelde, et $0 \cdot \infty$ on nääramatus, mitte alati 0, ning d'Alemberti'i tunnus on siin vastunäidustatud. Ja lihtsam on leida

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an}{bn+c}\right)^d = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{an}{bn+c}\right)^d = \left(\frac{a}{b}\right)^d,$$

kui hakata d-ga läbi astendama.

Osas c) ei viidatud kuidagi lausele 9.3, öeldi ainult, et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, seega rida hääbub. See läks maksma 0,2p. Ja kui $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, siis rida ei pea sugugi koonduma (nt. harmooniline rida).

3. Vaja oli kasutada Leibnitzi tunnust koonduvuse ja mõnda võrdluslauset tingimisi (mitte absoluutselt) koonduvuse näitamiseks.

Läbiv probleem Leibnitzi tunnuse korral oli see, et fakti $a_n \geq a_{n+1}$ tõestas ära vaid üks lahendaja. Seda on alati vaja teha, mitte võrrelda kolme esimest liikmete paari ja öelda, et "On näha, et...". KÕIK Leibnitzi tunnuse neli eeldust (vahelduvad märgid, mittenegatiivsed ja kahanevad liikmed vahelduvate märkide taga, mis koonduvad nulliks) tuleb alati detailselt läbi kontrollida Samuti, Leibnitzi tunnus ei ütle midagi ABSOLUUTSE koonduvuse kohta. Seda tuleb täiesti eraldi uurida. Viimaks, kui $0 \leq a_n \leq b_n$ ja rida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ hääbub, siis I võrdluslause ei ütle midagi rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ koonduvuse kohta. Küll aga ütleb ta, et see rida hääbub juhul, kui $0 \leq b_n \leq a_n$ ja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ hääbub.

4. Soovitan kogu protsessi üle korrata 23. praktikumi näidislahenduse abil.

Vigadest väärivad esiletoomist järgmised: Cauchy-Hadamard'i teoreem EI ÜTLE, et $A = (a-R, a+R)$. Ta ütleb vaid, et $A \supseteq (a-R, a+R)$. Otspunkte tuleb eraldi uurida, kusjuures otspunktid ei ole R ja $-R$, vaid hoopis $a+R$ ja $a-R$, kui astmerida on kujul $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Read tüüpi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$ ei ole iseenesest harmoonilised read ja nende hajuvuse näitamiseks tuleb kasutada mõnda võrdluslauset.