Matemaatiline analüüs I
2. praktikumi näidislahendusi

Ülesanne 5. Leidke järgmiste hulkade vähim ja suurim element ning alumine ja ülemine raja.

c) $X = \left\{3 - \dfrac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\right\}$;

g) $X = \{-1\} \cup (0, 1)$;

j) $X = (-1, \infty)$;

Lahendus:

c) Kuna esimesi elemente välja arvutades saame, et $X = \{2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, 2\frac{3}{4}, \ldots\}$, siis tekib hüpotees, et $\min X = 2$, $\max X$ ei leidu, $\inf X = 2$ ja $\sup X = 3$. Kuna 1) $2 \in X$ ja 2) iga $n \in \mathbb{N}$ korral $2 \leqslant 3 - \frac{1}{n}$, sest viimane võrratus on $n \geqslant 1$ tõttu samaväärne alati tõese võrratusega $2n \leqslant 3n - 1$ ehk $1 \leqslant n$, siis on suurima elemendi definitsiooni nõuded täidetud ja tõepoolest $\min X = 2$. Seetõttu vastavalt elektroonilise loengukonspekti lausele 1.4 ka $\inf X = 2$. Näitame nüüd, et $\sup X = 3$. Selleks kasutame ülemise raja definitsiooni. Esiteks, $3 \geqslant 3 - \frac{1}{n}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, sest jällegi $n \geqslant 1$ tõttu on see võrratus samaväärne alati tõese võrratusega $3n \geqslant 3n - 1$ ehk $1 \geqslant 0$. Järelikult on arv 3 hulga X ülemine tõke. Meil on nüüd vaja näidata, et 3 on hulga X vähim ülemine tõke. Oletame vastuväiteliselt, et see ei ole nii ja hulgal X leidub ülemine tõke b (st. $b \geqslant 3 - \frac{1}{n}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral), mis on rangelt väiksem, kui 3, st. $b < 3$. Siis $3 - b > 0$ ja võttes naturaalarvu $n_0 := \left\lceil \dfrac{1}{3-b} \right\rceil + 1 > \dfrac{1}{3-b}$ saame, et $b < 3 - \dfrac{1}{n_0}$, sest $3 - \dfrac{1}{\left\lceil \frac{1}{3-b} \right\rceil + 1} > 3 - \dfrac{1}{\frac{1}{3-b}} = 3 - (3 - b) = b$. See on vastuolu meie eeldusega, et $b \geqslant 3 - \dfrac{1}{n_0}$, järelikult ei ole võimalik, et hulgal X leiduks arvust 3 väiksem ülemine tõke ja me olemegi tõestanud, et $\sup X = 3$. Viimaks näitame, et $\max X$ puudub. Oletame jälle, et $\max X$ on olemas ja võrdne mingi arvuga a. Siis lause 1.4 kohaselt ka $3 = \sup X = \max X = a$ ehk $\max X = 3$. Kuna aga $3 \notin X$ (aga $\max X$ on alati hulga X element), siis oleme jõudnud vastuoluni. Järelikult meie eeldus, et hulgas X on olemas suurim element, oli väär ja $\max X$ ei leidu.

Vastus: Hulga $X = \left\{3 - \dfrac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\right\}$ korral $\min X = 2$, $\max X$ puudub, $\inf X = 2$ ja $\sup X = 3$.

g) Tõestame, et $\min X = -1$, $\max X$ puudub, $\inf X = -1$ ja $\sup X = 1$. Ilmselt $-1 \in X$ ja iga arvu $0 < x < 1$ korral $-1 < 0 < x$ ning $-1 \leqslant -1$, seega tõepoolest $\min X = -1$. Lause 1.4 kohaselt $\inf X = -1$. Samamoodi iga arvu $0 < x < 1$ korral $x < 1$ ning $-1 \leqslant 1$, järelikult on arv 1 hulga X ülemine tõke. Selleks, et näidata, et tegu on vähima ülemise tõkkega, kasutame elektroonilise loengukonspekti lause 1.2 tingimust (ii). Antud tingimuse kohaselt tuleb iga arvu $c \in R$, mis rahuldab võrratust $c < 1$, jaoks leida $x_0 \in \{-1\} \cup (0,1)$ selliselt, et $c < x_0$. Fikseerime vabalt $c < 1$. Siis tekib meil kaks juhtu: kui $c \leqslant -1$, siis võime võtta suvalise $x_0 \in X \setminus \{-1\}$, näiteks $x_0 = \dfrac{1}{2} > -1 \geqslant c$. Kui aga $-1 < c < 1$, siis $0 < \dfrac{1+c}{2} < 1$ ja $c = \dfrac{c}{2} + \dfrac{c}{2} < \dfrac{1+c}{2}$ ning arvuks x_0 sobib $\dfrac{1+c}{2}$. Seega tõepoolest $\sup X = 1$ ja lause 1.4 kohaselt $\max X$ puudub, sest kui $\max X$ oleks reaalarv, siis oleks ta võrdne arvuga $\sup X = 1$, aga $1 \notin X$.

Vastus: Hulga $X = \{-1\} \cup (0,1)$ korral $\min X = -1$, $\max X$ puudub, $\inf X = -1$ ja $\sup X = 1$.

j) Tõestame, et $\min X$ ja $\max X$ puuduvad, $\inf X = -1$ ja $\sup X = \infty$. Ilmselt iga arvu $-1 < x < \infty$ korral $-1 < x$ ja -1 on hulga X alumine tõke. Selleks, et näidata, et tegu on suurima alumise tõkkega, kasutame elektroonilise loengukonspekti lause 1.3 tingimust (ii'). Antud tingimuse kohaselt tuleb iga arvu $\varepsilon > 0$ jaoks leida $x_0 \in (-1,\infty)$ selliselt, et $x_0 < -1+\varepsilon$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Siis võttes $x_0 = -1 + \dfrac{\varepsilon}{2}$ saame, et $-1 < x_0 < \infty$ ja $x_0 = -1 + \dfrac{\varepsilon}{2} < -1 + \varepsilon$, ehk $x_0 \in X$ ja $x_0 < -1 + \varepsilon$, mida oligi vaja näidata. Järelikult lause 1.4 kohaselt ei saa $\min X$ leiduda, sest kui ta leiduks, siis $\min X = \inf X = -1 \in (-1,\infty)$, vastuolu. Näitame nüüd, et $\sup X = \infty$ ehk hulgal X ei leidu vähimat ülemist tõket. Selleks piisab, kui me näitame, et hulgal X ei leidu mitte ühtegi ülemist tõket ehk iga arvu $c \in \mathbb{R}$ korral leidub $x_0 \in (-1,\infty)$ nii, et $x_0 > c$. Fikseerime vabalt $c \in \mathbb{R}$. Siis võime võtta $x_0 = \max(0, c+1)$. Tõepoolest, kui $c < c+1 \leqslant \max(-1, c+1) = x_0$ ja $-1 < 0 \leqslant x_0 < \infty$ ehk $x_0 \in X$ ja $c < x_0$. Järelikult $\sup X = \infty$ ja Lause 1.4 kohaselt $\max X$ ei leidu, vastasel korral oleks $\inf X = \max X = a \in X \subset \mathbb{R}$, mille võimatuse me just tõestasime.

Vastus: Hulga $X = (-1,\infty)$ korral $\min X$ ja $\max X$ puuduvad, $\inf X = -1$ ja $\sup X = \infty$.