Matemaatiline analüüs I
14. praktikumi näidislahendus

Ülesanne 91. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud iseloomustavate andmete põhjal.

h) $f(x) = \begin{cases} 1+\ln|x|, & \text{kui } x \in (-\infty,0) \cup (0,1], \\ \mathrm{e}^{-x}, & \text{kui } x \in (1,\infty); \end{cases}$.

Lahendus:

f) Meil on vaja leida funktsiooni f jaoks järgmised andmed:

1. Määramispiirkond:
   Ülesande sõnastus juba välistab ainsa mittesobiva punkti 0 ($\ln 0$ ei ole nimelt määratud), seega määramispiirkonnaks on $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$;

2. Pidevuse piirkond ja katkevuspunktid:
   Tegu on elementaarfunktsioonide ja pideva funktsiooni $|x|$ liitfunktsioonidega, mis on oma määramispiirkonnas pidevad. Ainus võimalik katkevus võib esineda kleepepunktis 1. Ja tõepoolest, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(1+\ln|x|) = 1+0 = 1 \neq \frac{1}{e} = \lim\limits_{x\to 1^+} e^{-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Seega antud funktsioon on pidev piirkonnas $(-\infty,0) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$ ja tal on esimest liiki katkevus punktis 1.

3. Paarsus (paaris või paaritu), perioodilisus:
   Kuna $f(e) = \frac{1}{e^e} \neq 2 = f(-e)$ ja $f(e) = \frac{1}{e^e} \neq -2 = -f(-e)$, siis ei ole tegu ei paaris ega paaritu funktsiooniga. Samuti ei ole funktsioon f perioodiline, sest tema “parem pool” e^{-x} ei ole perioodiline.

4. Funktsiooni nullkohad:
   Suurus e^{-x} ei ole kunagi 0; $1+\ln|x| = 0$ siis, kui $\frac{1}{e} = e^{-1} = e^{\ln|x|} = |x|$ ehk $x = \pm\frac{1}{e}$, järelikult nullkohtadeks on $\frac{1}{e}$ ja $-\frac{1}{e}$.

5. Kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid:

Saame, et $f'(x) = \begin{cases} (1+\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}, & \text{kui } x \in (-\infty,0)\cup(0,1), \\ \text{puudub}, & \text{kui } x = 1, \\ (\mathrm{e}^{-x})' = -e^{-x}, & \text{kui } x \in (1,\infty); \end{cases}$;

sest $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \neq -\dfrac{1}{e} = \lim\limits_{x\to 1^+} -e^{-x} \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)$. Siit leiame, et mistahes $x \in (-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$ korral $f'(x) \neq 0$ ja ainus kriitiline punkt on seega 1. Lisaks on funktsioon f määramata punktis 0, mille ümbruses tasub seetõttu samuti funktsiooni monotoonsust uurida. Kuna $\dfrac{1}{x} < 0$, kui $x < 0$, ja vastupidi ning $-e^{-x}$ on alati negatiivne, siis on funktsioon f rangelt kahanev piirkonnas $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ ja rangelt kasvav piirkonnas $(0,1)$. Järelikult on meil punktis 1 range lokaalne maksimum $f(1) = 1$. See maksimum ei ole globaalne, sest $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1+\ln|x|) = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = 0$. Punkti 0 ümber käitub funktsioon f sarnaselt lokaalse miinimumiga (vasakul pool kahaneb, paremal pool kasvab).

6. Graafiku kumerus- ja nõgususpiirkonnad, käänupunktid:

Leiame, et $f''(x) = \begin{cases} (\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2}, & \text{kui } x \in (-\infty,0)\cup(0,1), \\ (-\mathrm{e}^{-x})' = e^{-x}, & \text{kui } x \in (1,\infty); \end{cases}$.

Siit on kohe näha, et $f''(x) < 0$, kui $x \in (-\infty,0)\cup(0,1)$, ja $f''(x) > 0$, kui $x \in (1,\infty)$. Järelikult on funktsiooni f graafik kumer piirkonnas $x \in (-\infty,0)\cup(0,1)$ ja nõgus piirkonnas $x \in (1,\infty)$. Käänupunktiks võiks seetõttu olla punkt $(1, 1+\ln|1|) = (1,1)$ (punkt 0 ei ole käänupunkt, sest seal ei ole funktsioon defineeritud). Kuid f ei ole pidev punktis 1, seega ka punkt 1 ei ole käänupunkt.

7. Kald- ja püstasümptoodid:

Püstasümptootide leidmiseks tuleb uurida, kas mõne punkti $a \in (-\infty,0)\cup(0,\infty]$ korral $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ või $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$. Kuna meie funktsioon on pidev igas punktis peale 0 (vt. lahenduse alapunkt 2.), on meil vaja uurida piirväärtusi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(1+\ln|x|) = -\infty = \lim_{x\to 0^-}(1+\ln|x|) = \lim_{x\to 0^-} f(x).$$

Siit on näha, et püstasümptoodiks on sirge $x = 0$.

Kaldasümptootide jaoks on meil vaja leida piirväärtused $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \cdot e^x} = 0$ ja $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\ln|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$. Esimesel juhul võtame $m = 0$ ja leiame $b = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$. Teisel juhul samuti $m = 0$, aga $b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} (1 + \ln|x| - 0 \cdot x) = \infty$. Järelikult on meil ainult üks rõhtasümptoot $y = mx + b = 0x + 0 = 0$.

Vastus: Eelnevate andmete põhjal võime funktsiooni f graafiku joonistada järgmiselt: