Matemaatiline analüüs I
16. ja 18. praktikumi näidislahendusi

Näide 1. (Muutujavahetuse ohtlikkus) Leidke järgmine integraal märgitud muutuja vahetusega: $\int |\cos x| \, \mathrm{d}x$, $x = \frac{\pi}{2} \sin t$.

Lahendus:

Ignoreerime tõsiasja, et antud muutujavahetus kitsendab oluliselt koosinuse argumendi muutumispiirkonda ja vaatame, mis välja tuleb. Esiteks $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2} \sin t\right)$, kust

$$\int |\cos x| \, \mathrm{d}x \quad = \quad \int \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin t\right)\right| \mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2} \sin t\right).$$

Teame, et mistahes $t \in \mathbb{R}$ korral $\sin t \in [-1, 1]$, seega $\frac{\pi}{2} \sin t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ja järelikult $\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin t\right) \in [0, 1]$ ning $\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin t\right)\right| = \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin t\right)$. Siis aga

$$\int |\cos x| \, \mathrm{d}x \quad = \quad \int \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin t\right) \mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2} \sin t\right) = \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C,$$

sest $x = \frac{\pi}{2} \sin t$. Samas tegelikult $\int |\cos x| \, \mathrm{d}x = \operatorname{sgn}(\cos x) \cdot \sin x + C$ ja näiteks punktis $\frac{3\pi}{4}$ on saadud “vastus” võrdne arvuga $\frac{1}{\sqrt{2}}$, õige vastus on aga $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Seega nii ei tohi teha ja iga muutujavahetuse põhjendatust tuleb eraldi analüüsida!

Ülesanne 98. Leidke järgmised integraalid märgitud muutuja vahetusega.

f) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x,\ t = x - \frac{1}{x}.$

Lahendus:

f) Kuna $x^4 + 1 > 0$ mistahes $x \in \mathbb{R}$ korral, siis algse integraali peame leidma suvalise reaalarvu x jaoks. Muutujavahetus $t = x - \frac{1}{x}$ teisendab muutuja x muutujaks t funktsiooni $\varphi(x) : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to X$, $\varphi(x) = x - \frac{1}{x}$, abil. Kuna $\varphi(x)$ kui elementaarfunktsioonide vahe on oma määramispiirkonnas $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pidev, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty = \lim\limits_{x\to 0^-} \varphi(x)$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x)$, siis rakendades Bolzano-Cauchy teoreemi (lõigus pidev funktsioon saavutab selles lõigus kõik oma otspunktide väärtuste vahele jäävad väärtused) kõigile lõikudele $[-a, -\frac{1}{a}]$, $a > 0$, saame, et $X = \mathbb{R}$. Järelikult tuleb meil t järgi integreerida kõigi t reaalarvuliste väärtuste korral ja veel eraldi kontrollida juhtu $x = 0$.

Leiame esmalt diferentsiaali

$$\mathrm{d}t = \left(x - \frac{1}{x}\right)' \mathrm{d}x = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^2+1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

ehk $x^2\,\mathrm{d}t = (x^2+1)\,\mathrm{d}x$. Asendades viimase võrduse integranti, on tulemuseks

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}t.$$

Kuna $t = \dfrac{x^2-1}{x}$, siis avaldame $x^4 + 1 = (x^2-1)^2 + 2x^2$ ja

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{x^2}{(x^2-1)^2+2x^2} = \frac{1}{\frac{(x^2-1)^2+2x^2}{x^2}} = \frac{1}{2+\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2+t^2}.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{\sqrt{2}^2}t^2} = \int \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}\frac{t}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C.
\end{aligned}$$

Asendades tagasi $t = \dfrac{x^2-1}{x}$ saame, et

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)+C.$$

Diferentseerides leiame, et

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)+C\right)' &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)^2}\cdot\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)'\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\frac{2x^2+(x^2-1)^2}{2x^2}}\cdot\frac{2x\sqrt{2}x-(x^2-1)\sqrt{2}}{2x^2}\\
&= \frac{2x^2(2x^2-x^2+1)}{(2x^2+(x^2-1)^2)2x^2}\\
&= \frac{x^2+1}{2x^2+x^4-2x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^4+1},
\end{aligned}$$

sõltumata sellest, kas x on või ei ole võrdne nulliga. Seega oleme tegelikult leidnud otsitava integraali mistahes x reaalarvulise väärtuse jaoks ja ühtlasi kontrollinud oma vastuse õigsust.

Vastus: Otsitav määramata integraal on

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)+C,$$

kus C on integreerimiskonstant.

Ülesanne 99. Sobiva muutuja vahetusega leidke järgmised integraalid.

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$;

f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}}$.

Lahendus:

e) Siin on mitu võimalust. Kuna me näeme integraali all suurust $\dfrac{1}{x^2+a^2}$, mis sarnaneb arkustangensi tuletisele, võib proovida asendust $t = \arctan\dfrac{x}{a}$. Sellisel juhul tuleb eraldi vaadelda juhtu, kui $a = 0$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+0^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2|x|} = \operatorname{sgn}(x)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\operatorname{sgn}(x)\frac{1}{2x^2} + C = -\frac{1}{2x|x|} + C.$$

(Paneme tähele, et funktsiooni $\operatorname{sgn}(x)$ saame me integraali märgi alt välja tuua tänu järgmisele mõttekäigule:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sgn}(x) f(x)\,\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int 1\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sgn}(x)\int f(x)\,\mathrm{d}x, \text{kui } x \geqslant 0,\\ \displaystyle\int (-1)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = -\int f(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sgn}(x)\int f(x)\,\mathrm{d}x, \text{kui } x < 0,\end{array}\right\} =\\ &= \operatorname{sgn}(x)\int f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Kuna arctan on pidev funktsioon, siis Bolzano-Cauchy teoreemi kohaselt teisendab ta muutuja x määramispiirkonna $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (nulliga ei saa integraali alla jagada) piirkonnaks $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Järelikult tuleb meil t järgi integreerida vähemalt hulgas $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Leiame esmalt diferentsiaali

$$\mathrm{d}t = \left(\arctan\frac{x}{a}\right)'\mathrm{d}x = \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{a\,\mathrm{d}x}{a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)} = \frac{a\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2}.$$

Kuna $a \neq 0$, siis $x^2+a^2 > 0$ ja $\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}t}{a} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$. Kasutades võrdust $\tan t = \dfrac{x}{a}$ ehk $x = a\tan t$ saame, et

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} &= \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}t}{x^2 a} = \int \frac{\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}\,\mathrm{d}t}{a^3\tan^2 t} \\ &= \frac{1}{a^3}\int \frac{\sqrt{a^2}\sqrt{\tan^2 t+1}\,\mathrm{d}t}{\tan^2 t} = \frac{|a|}{a^3}\int \frac{\sqrt{\tan^2 t+1}\,\mathrm{d}t}{\tan^2 t}.\end{aligned}$$

Kuna $1+\tan^2 t = \dfrac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, siis

$$\frac{|a|}{a^3}\int \frac{\sqrt{\tan^2 t+1}\,\mathrm{d}t}{\tan^2 t} = \frac{1}{a|a|}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t}\cdot\tan^2 t} = \frac{1}{a|a|}\int \frac{\mathrm{d}t}{|\cos t|\tan^2 t}.$$

Praegu on meil vaja integreerida vaid juhul, kui $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\cup\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, mistõttu $\cos t > 0$ ja $|\cos t| = \cos t$. Seega piirkonnas $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\cup\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ kehtib

$$\begin{aligned}\frac{1}{a|a|}\int \frac{\mathrm{d}t}{|\cos t|\tan^2 t} &= \frac{1}{a|a|}\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t\,\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{a|a|}\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} \\ &= \frac{1}{a|a|}\int \frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a|a|\sin t}+C.\end{aligned}$$

Kuna $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \dfrac{x}{a}$ ehk $\cos t = \dfrac{a}{x}\sin t$ (meenutame, et $x \neq 0$), siis

$$\sin^2 t = 1-\cos^2 t = 1-\frac{a^2}{x^2}\sin^2 t,$$

mistõttu

$$1 = \left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)\sin^2 t = \frac{x^2+a^2}{x^2}\sin^2 t$$

ja

$$|\sin t| = \sqrt{\sin^2 t} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+a^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Kuna piirkonnas $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ kehtib

$$\sin t = \operatorname{sgn}(t)|\sin t| = \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{a}\right)|\sin t| = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(a)|\sin t|$$

(mõelge siinusfunktsiooni graafikule), siis

$$-\frac{1}{a|a|\sin t}+C \quad = \quad -\frac{1}{a|a|\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(a)\frac{|x|}{\sqrt{x^2+a^2}}}+C = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$$

Teine võimalus on tähele panna, et tegelikult esineb integraali all juba hüperboolse areasiinuse tuletisele sarnanev avaldis $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ja teha asendus $t = \operatorname{arsh}\frac{x}{a}$. Ka seekord on vaja eraldi uurida juhtu $a = 0$, mis on meil juba tehtud. Uuesti on hüperboolne areasiinus kui korrutis- ja eksponentfunktsionide liitfunktsioon pidev funktsioon, mis Bolzano-Cauchy teoreemi põhjal teisendab piirkonna $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ iseendaks (miks?). Seega tuleb meil integreerida kõigi t nullist erinevate väärtuste järgi.

Leiame jälle esmalt diferentsiaali

$$\mathrm{d}t = (\operatorname{arsh}\frac{x}{a})'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sgn}(a)\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}} = \operatorname{sgn}(a)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Asendame tulemuse integranti ja kasutame võrdust $x = a\operatorname{sh} t$:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} \quad = \quad \int\frac{\operatorname{sgn}(a)\,\mathrm{d}t}{a^2\operatorname{sh}^2 t} = \frac{\operatorname{sgn}(a)}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}^2 t} = \frac{\operatorname{sgn}(a)}{a^2}(-\operatorname{cth} t)+C.$$

Kuna $\operatorname{sh} t = \frac{x}{a}$, siis

$$\operatorname{cth}^2 t = \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh}^2 t} = \frac{1+\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{sh}^2 t} = \frac{1+\frac{x^2}{a^2}}{\frac{x^2}{a^2}} = \frac{x^2+a^2}{x^2}$$

ja

$$|\operatorname{cth} t| = \sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{|x|}.$$

Kuna $\operatorname{ch} t > 0$ iga t korral, siis

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{cth} t) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t) = \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{a}\right) = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(a)$$

ja

$$\operatorname{cth} t = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(a)\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{|x|}.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sgn}(a)}{a^2}(-\operatorname{cth} t)+C &= \frac{\operatorname{sgn}(a)}{a^2}(-\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(a)\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{|x|})+C\\ &= -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C\end{aligned}$$

Kolmas variant on kasutada teisendust $t=\frac{1}{x}$, mida vaatleme lähemalt järgmises alamülesandes.

f) Kasutamegi teisendust $t=\frac{1}{x}$. Kuna ka antud ülesandes tuleb välistada nulliga jagamine, siis $x \neq 0$. Lisaks peab juurealune avaldis olema positiivne, seega $x^2-a^2>0$ ehk $|x|>|a|$. Teisendus $\frac{1}{x}$ on jälle pidev ja viib muutuja x määramispiirkonna $(-\infty,-|a|)\cup(|a|,\infty)$ piirkonnaks $(-\frac{1}{|a|},0)\cup(0,\frac{1}{|a|})$. Tasub jälle eraldi vaadelda juhtu $a=0$:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-0^2}} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x|x|} = -\operatorname{sgn}(x)\frac{1}{x}+C = \frac{1}{|x|}+C.$$

Edaspidi $a \neq 0$ ja me võime jälle a-ga jagada.

Kuna

$$\mathrm{d}t = (\frac{1}{x})'\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

siis

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} &= \int \frac{-x\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-a^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-a^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sgn}(t)\sqrt{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-a^2}} \\
&= -\int \frac{a\mathrm{d}t}{a\cdot \mathrm{sgn}(t)\sqrt{1-(at)^2}} = -\frac{\mathrm{sgn}(t)}{a}\int \frac{\mathrm{d}(at)}{\sqrt{1-(at)^2}} \\
&= -\frac{\mathrm{sgn}(t)}{a}\arcsin(at)+C = -\frac{\mathrm{sgn}(x)}{a}\arcsin(\frac{a}{x})+C \\
&= -\frac{1}{a}\arcsin(\frac{a}{|x|})+C
\end{aligned}
$$

Vastus: Otsitavad määramata integraalid on

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$$

ja

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin(\frac{a}{|x|})+C,$$

kus C on integreerimiskonstant.