Matemaatiline analüüs I
3. praktikumi näidislahendusi

Ülesanne 8. Leidke järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

k) $f(x) = \arccos\dfrac{2}{1+x}$;

l) $f(x) = \sqrt{D(x)-1}$, kus D on Dirichlet' funktsioon.

Lahendus:

k) Kuna iga $x \in \mathbb{R}$ korral $\cos x \in [-1,1]$, siis arkuskoosinuse leidmiseks peab tema argument jääma lõiku $[-1,1]$. Seega

$$-1 \leqslant \frac{2}{1+x} \leqslant 1,$$

ehk $-1-x \leqslant 2 \leqslant 1+x$ (kui $1+x>0$) või $-1-x \geqslant 2 \geqslant 1+x$ (kui $1+x<0$). Lihtsustades saame, et

$$\begin{aligned} x &\in [-3,\infty)\cap[1,\infty)\cap(-1,\infty)\cup(-\infty,-3]\cap(-\infty,1]\cap(-\infty,-1) \\ &= (-\infty,-3]\cup[1,\infty). \end{aligned}$$

l) meenutame, et $D(x)=1$, kui $x\in\mathbb{Q}$ ja $D(x)=0$, kui $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Kuna (reaalarvude hulgas) ruutjuure võtmiseks on tarvilik, et argument oleks mittenegatiivne, siis peab funktsiooni $f(x)$ määratuseks olema täidetud võrratus $D(x)-1\geqslant 0$ ehk $D(x)\geqslant 1$. Arvestades $D(x)$ definitsiooni, on viimane võrratus samaväärne võrdusega $D(x)=1$ ehk $x\in\mathbb{Q}$.

Vastus: Funktsiooni $f(x) = \arccos\dfrac{2}{1+x}$ määramispiirkonnaks on hulk $(-\infty,-3]\cup[1,\infty)$ ja funktsiooni $f(x)=\sqrt{D(x)-1}$ määramispiirkonnaks on kõigi ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$.

Ülesanne 9. Otsustage, kas järgmised funktsioonid f on alt tõkestatud, ülalt tõkestatud, tõkestatud hulgas A.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $A = (0,1)$.

Lahendus:

b) Meil on vaja uurida, kas hulk $\{f(x) \mid x \in A\} = \left\{\dfrac{1}{x} \mid 0 < x < 1\right\}$ on (alt, ülalt) tõkestatud. On lihtne veenduda, et antud funktsioon on alt tõkestatud. Tõepoolest, alumiseks tõkkeks sobib näiteks arv 1, sest kui $0 < x < 1$, siis $1 \leqslant \dfrac{1}{x}$. Pöördfunktsiooni graafiku põhjal võib oletada, et see funktsioon ei ole ülalt tõkestatud. Näitame seda. Selleks piisab, kui me iga arvu ε jaoks leiame $0 < x < 1$ nii, et $\varepsilon < \dfrac{1}{x}$. Fikseerime vabalt $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Kui $\varepsilon \leqslant 1$, siis sobib näiteks $x = \dfrac{1}{2} \in A$, sest $\varepsilon \leqslant 1 < 2 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}}$. Kui aga $\varepsilon > 1$, siis võime võtta $x = \dfrac{1}{\varepsilon + 1}$, sest sel juhul $0 < \dfrac{1}{\varepsilon+1} < 1$ ja $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon+1}} = \varepsilon + 1 > \varepsilon$.

Vastus: Funktsioon $f(x) = \dfrac{1}{x}$ on hulgas $(0,1)$ alt tõkestatud, ülelt tõkestamata ja seetõttu kokkuvõttes tõkestamata.

Ülesanne 14. Leidke järgmiste jadade piirväärtused.

f) $x_n = \dfrac{n}{n+1} + n^2 \sin n\pi;$

i) $x_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+\sin 9}.$

Lahendus:

f) Kuna $\sin n\pi = 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis ka $n^2 \sin n\pi = 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks ja piirväärtuse aritmeetika põhjal $\lim\limits_n x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1} + n^2 \sin n\pi\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$. Siin on meil tegu $\dfrac{\infty}{\infty}$ tüüpi piirväärtusega. Üks võimalus sellisteid piirväärtusi leida on jagada või korrutada lugejat ja nimetajat sobiva nullist erineva arvuga. Antud juhul sobib selleks n:

$$\lim_n \frac{n}{n+1} = \lim_n \frac{n\cdot\frac{1}{n}}{(n+1)\cdot\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_n 1}{\lim\limits_n 1 + \lim\limits_n \dfrac{1}{n}} = 1,$$

sest $\lim\limits_n \dfrac{1}{n} = 0$ (elektroonilise loengukonspekti näide 2.5)

i) Meenutame kõigepealt, et lause 2.10 kohaselt $\lim\limits_n \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$. Vaadeldava jada x_n üldliige on sellega mõneti sarnane, seega on otstarbekas piirväärtust leida alljärgneval viisil. Edasistes teisendustes kasutame eelmist ülesannet ($\lim\limits_n \dfrac{n}{n+1} = 1$), piirväärtuse aritmeetikat ning astmefunktsiooni $x^{\sin 9}$ pidevust:

$$\begin{aligned}
\lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\sin 9} &= \lim_n \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sin 9}\right] = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sin 9} \\
&= \lim_n \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \cdot \left(\lim_n \frac{n}{n+1}\right)^{\sin 9} = \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \left(\lim_n \frac{n}{n+1}\right)^{\sin 9} \\
&= \frac{1}{\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot 1^{\sin 9} = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Vastus: Oleme leidnud, et $\lim\limits_n \left(\dfrac{n}{n+1} + n^2 \sin n\pi\right) = 1$ ja $\lim\limits_n \left(\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+\sin 9}\right) = \dfrac{1}{e}$.

Ülesanne 17. Sõnastage piirväärtuse definitsioon järgmiste piirväärtuste jaoks.

b) $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty.$

Lahendus:

b) Võttes piirväärtuse definitsioonis $a = 1$ ja kasutades analoogiat piirväärtustega kujul $x \to \infty$ võime kirjutada, et

Vastus:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X \;\; |x - 1| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon.$$