Matemaatiline analüüs I
23. praktikumi näidislahendusi

Ülesanne 126. Leidke järgmiste astmeridade koonduvusraadiused R, koonduvuspiirkonnad X ja absoluutse koonduvuse piirkonnad A.

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$.

Lahendus:
m) Kuna $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$, siis üldliikme avaldises $a_n = \frac{n^n}{n!}$ on sees faktoriaal, järelikult tasub koonduvusraadius R leida valemist

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{n^n}{n!} \right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)}{n^n (n+1)}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Cauchy-Hadamard'i teoreemi põhjal $A = \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. Punkte $-\frac{1}{e}$ ja $\frac{1}{e}$ tuleb veel eraldi uurida.

Olgu $x = \frac{1}{e}$. Siis peame uurima arvrea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! e^n}$ koonduvust. Tegu on positiivsete liimetega reaga (kuna $n \geqslant 1$, siis $\frac{n^n}{n! e^n} \geqslant 0$), seega võime kasutada võrdluslauseid. Stirlingi valemi

$$\frac{e^n}{n^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}, \text{ kui } n \to \infty$$

kohaselt on piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^n}{n! e^n}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^n} \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!} = 1.$$

Kuna rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ on sisuliselt üldistatud harmooniline rida, mis $\frac{1}{2} < 1$ tõttu hajub, siis II võrdluslause kohaselt ka rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! e^n}$ hajub.

Olgu $x = -\frac{1}{e}$. Nüüd on vaja uurida arvrea $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!e^n}$ koonduvust. Ikka veel $\frac{n^n}{n!e^n} \geqslant 0$ ja lisaks ka $\frac{n^n}{n!e^n} \geqslant \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}}$, sest

$$n^n(n+1)!e^{n+1} \geqslant (n+1)^{n+1}n!e^n$$

tänu võrdusele $n^n e \geqslant (n+1)^n$ ehk $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$. Viimane võrratus kehtib, sest jada $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ kasvab monotoonselt arvuks e (viimane fakt tõestatakse Newtoni binoomvalemi abil kursuses "Matemaatiline analüüs III"). Järelikult on meil tegu vahelduvate märkidega kahaneva absoluutväärtusega üldliikmega reaga $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!e^n}$, mis Leibnitzi tunnuse põhjal koondub. Eelmise lõigu kohaselt $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n^n}{n!e^n}\right|$ hajub, seega rida $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!e^n}$ koondub tingimisi.

Vastus: Otsitav koonduvusraadius on $R = \frac{1}{e}$ ja koonduvuspiirkonnad on $A = \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ ja $X = \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.