Matemaatiline analüüs I
26. ja 27. praktikumi näidislahendusi

Ülesanne 141. Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise teel.

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x$.

Lahendus: h) Kaks korda ositi integreerides saame, et

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x &= e^x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^{\frac{\pi}{2}} - 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x \\
&= e^{\frac{\pi}{2}} - \left(e^x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x (-\sin x) \,\mathrm{d}x\right) \\
&= e^{\frac{\pi}{2}} - (0 - e^0 \cdot 1) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

kust

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right).$$

Vastus: Otsitav integraal on $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$.

Ülesanne 145. Leidke järgmised integraalid.

h) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{1+x}}$; q) $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5+4x}}$.

Lahendus: h) Valides $t = 1+\sqrt[3]{1+x}$ saame, et $\sqrt[3]{1+x} = t-1$ ja

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3(t-1)^2}\mathrm{d}x.$$

Seetõttu

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{1+x}} &= \int_{1}^{2} \frac{3(t-1)^2}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{2} \frac{3(t^2-2t+1)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= 3\int_{1}^{2} (t-2+\frac{1}{t})\,\mathrm{d}t = 3\left(\frac{t^2}{2}-2t+\ln t\right)\Big|_{1}^{2} \\ &= 3\left(\frac{4}{2}-4+\ln 2-(\frac{1}{2}-2+\ln 1)\right) = 3(\ln 2-\frac{1}{2}) = \ln 2^3-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

q) Asendades seekord $t = \sqrt{5+4x}$ saame, et $t^2 = 5+4x$ ehk $x = \dfrac{t^2-5}{4}$ ja

$$\mathrm{d}t = \frac{4}{2\sqrt{5+4x}}\mathrm{d}x = \frac{2}{t}\mathrm{d}x.$$

Siit tulenevalt

$$\begin{aligned}\int_{1}^{5} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5+4x}} &= \int_{3}^{5} \frac{t^2-5}{4t}\,\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\cdot\int_{3}^{5} (t^2-5)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{t^3}{3}-5t\right)\Big|_{3}^{5} \\ &= \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{125}{3}-25-\left(\frac{27}{3}-15\right)\right) = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{50}{3}-9+15\right) = \frac{68}{24}.\end{aligned}$$

Vastus: Otsitavad integraalid on $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{1+x}} = \ln 8-\frac{3}{2}$ ja

$$\int_{1}^{5} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5+4x}} = \frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}.$$

Ülesanne 146. Arvutage järgmised integraalid või veenduge nende hajuvuses.

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; s) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Lahendus: e) Tegu on päratu integraaliga, sest mõlemas otspunktis -1 ja 1 on funktsioon $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ tõkestamata. Seetõttu tuleb meil päratut integraali leida kahes osas (sest õnneks mujal nulliga jagamist ei toimu):

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{K\to-1}\int_{K}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{L\to1}\int_{0}^{L} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{K\to-1}\left(\arcsin x\Big|_K^0\right) + \lim_{L\to1}\left(\arcsin x\Big|_0^L\right) \\
&= \lim_{K\to-1}(-\arcsin k + 0) + \lim_{L\to1}(\arcsin L - 0) \\
&= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.
\end{aligned}$$

s) Kuna tegu on lõpmatu rajaga, siis leiame esmalt iga $L > 0$ jaoks integraali

$$\begin{aligned}
\int_0^L x\sin x\,\mathrm{d}x &= (-x\cos x)\Big|_0^L - \int_0^L (-\cos x)\,\mathrm{d}x = -L\cdot\cos L - 0 + \sin x\Big|_0^L \\
&= -L\cdot\cos L + \sin L - 0 = \sin L - L\cdot\cos L.
\end{aligned}$$

Definitsioonist $\displaystyle\int_0^{\infty} x\sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to\infty}\int_0^L x\sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to\infty}(\sin L - L\cdot\cos L)$. Viimast piirväärtust aga ei ole olemas. Selle näitamiseks oletame vastuväiteliselt, et et $\displaystyle\lim_{L\to\infty}(\sin L - L\cdot\cos L) = A \in \mathbb{R}$. Vaatleme jadasid $a_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ ja $b_n = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$. Siis $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, $\sin a_n - a_n\cdot\cos a_n = 1 - 0 = 1$ ja $\sin b_n - b_n\cdot\cos b_n = -1 - 0 = -1$. Heine kriteeriumi ütleb meile nüüd, et $A = \displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sin a_n - a_n\cdot\cos a_n) = 1$ ja $A = \displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sin b_n - b_n\cdot\cos b_n) = -1$, mis ei ole võimalik. Järelikult vaadeldav päratu integraal hajub.

Vastus: Päratu integraal $\displaystyle\int_0^{\infty} x\sin x\,\mathrm{d}x$ hajub, kuid $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$.

Ülesanne 149. Leidke järgmiste joontega piiratud kujundite pindalad ($a, b > 0$).

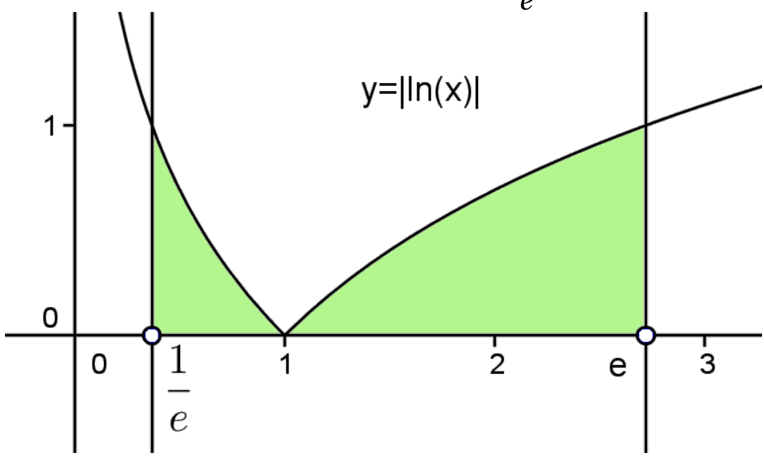
g) $y = |\ln x|$, $y = 0$, $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ja $x = \mathrm{e}$;

l) $r = a \sin 3\varphi$ (kolmeleheline roos).

Lahendus: g) Kasutame valemit $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kus antud juhul $f(x) = |\ln x|$, $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ja $b = e$. Arvestades, et $\ln x \leqslant 0$, kui $0 < \dfrac{1}{e} \leqslant x \leqslant 1$ ja $\ln x \geqslant 0$, kui $1 \leqslant x \leqslant e$, saame ositi integreerides, et otsitav pindala on

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{e} |\ln x|\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} |\ln x|\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{e} |\ln x|\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} (-\ln x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{e} \ln x\,\mathrm{d}x \\
&= -x\ln x\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} - \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \left(-x \cdot \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + x\ln x\Big|_{1}^{e} - \int_{1}^{e} \left(x \cdot \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= (-1)\cdot\ln 1 - (-\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}) + \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \mathrm{d}x + e\cdot\ln e - (1\cdot\ln 1) - \int_{1}^{e} \mathrm{d}x \\
&= 0 + \frac{1}{e}\cdot(-1) + x\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} + e\cdot 1 - 1\cdot 0 - x\Big|_{1}^{e} = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e - 0 - e + 1 = 2 - \frac{2}{e}.
\end{aligned}$$

Vastus: Otsitav kujundi pindala on $S = 2 - \dfrac{2}{e}$.



l) Joone polaarkoordinaatide $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $r = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, korral võivad joone punktid $(r_1\cos\varphi_1, r_1\sin\varphi_1)$ ja $(r_2\cos\varphi_2, r_2\sin\varphi_2)$ kattuda, kui $r_1 = -r_2$ ja $\varphi_1 = \pi + \varphi_2$ (koordinaatide alguspunkti suhtes vastandnurgad, millest teise korral on raadius negatiivne ehk vastav punkt tuleb vastandnurga suunas täpselt sama kaugele). Seega on meil kaare pikkuse mitmekordse arvutamise vältimiseks vaja uurida, kas antud joone korral midagi sellist toimub. Ja tõepoolest, $a\sin 3\varphi = -a\sin(\pi + 3\varphi)$. Järelikult tasub meil vaadelda ainult pooli täisringi nurki ja integreerida üle $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (muidu me saame kahekordse vastuse). Edasises integreerimises osutub kasulikuks valem

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \tag{1}$$

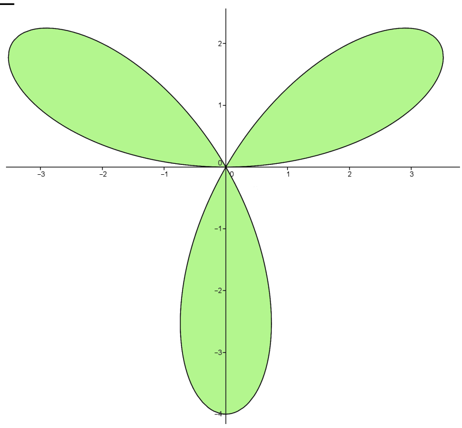
mis kehtib, sest

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\frac{\cos^2 x + \cos^2 x}{2} = 1-\frac{1-\sin^2 x + \cos^2 x}{2} = 1-\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Kolmelehelise roosi pindala saame nüüd kõversektori pindala valemist $S = \int_\alpha^\beta \frac{\varrho(\varphi)^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi$, kus $\varrho(\varphi) = a\sin 3\varphi$, $\alpha = 0$ ja $\beta = \pi$, kasutades valemit (1):

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi \frac{(a\sin 3\varphi)^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \sin^2 3\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \frac{1-\cos 6\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2\cdot 2\cdot 6}\int_0^\pi (1-\cos 6\varphi)\,\mathrm{d}(6\varphi) \\ &= \frac{a^2}{24}(6\varphi - \sin 6\varphi)\Big|_0^\pi = \frac{a^2\cdot 6\pi}{24} - \frac{a^2\cdot\sin 6\pi}{24} - (0+0) = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

Vastus: Kolmelehelise roosi pindala on $S = \dfrac{\pi a^2}{4}$



Ülesanne 150. Leidke järgmiste pindadega piiratud kehade ruumalad (a, b ja c on positiivsed konstandid).

d) $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ (Steinmetzi keha ehk bisilinder).

Lahendus: d) Võrrandisüsteemi $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y^2+z^2=a^2 \end{cases}$ lahendamisel saame, et $a^2-x^2=y^2=a^2-z^2$, kust $x^2=z^2$ ehk $z=\pm x$. Seega antud pinnad, milleks on z- ja x-telje suunalised silindrid raadiusega a, lõikuvad punktides $\left(\pm\sqrt{a^2-y^2}, y, \pm\sqrt{a^2-y^2}\right)$. Siit on näha, et $-a \leqslant y \leqslant a$. Lõigates tekkivat keha tasandiga $y=y_0$, saame ristlõikeks hulga

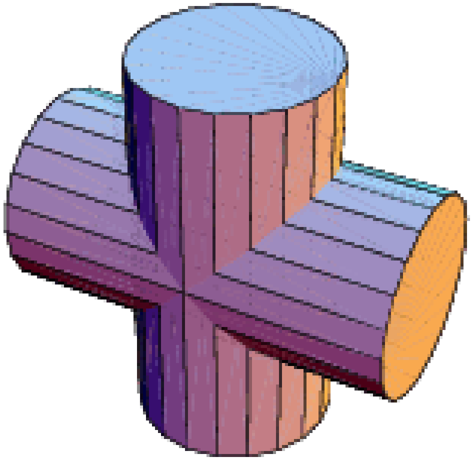
$$D_{y_0}=\left\{(x,y_0,z)\mid -\sqrt{a^2-y_0^2}\leqslant x,z\leqslant\sqrt{a^2-y_0^2}\right\}.$$

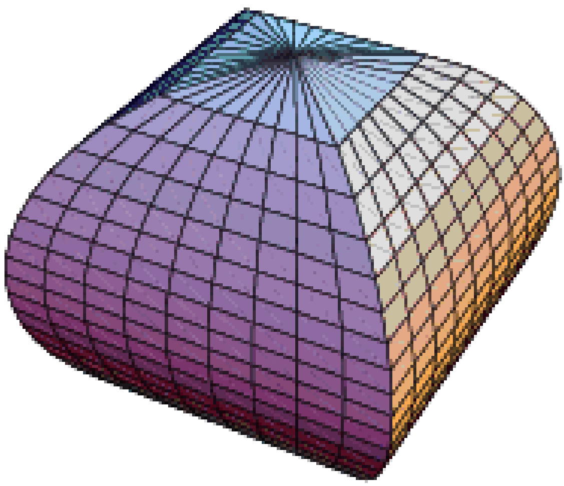
Kuna x ja z sõltuvad ainult y-st, siis on iga $y=y_0$ korral ristlõikeks ruut küljepikkusega $2\sqrt{a^2-y_0^2}$ (vt. joonist järgmiselt leheküljelt), mille pindala on $S(y_0)=4\left(\sqrt{a^2-y_0^2}\right)^2$. (Kui me lõikaksime tasandiga $x=x_0$, oleks meil $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ ning omakorda $z=\pm\sqrt{a^2-y^2}$ ja z sõltuks y-st ning ristlõikeks on kõvertrapets, mille pindala on keerulisem leida.) Paneme muuseas tähele, et $S(y)=S(-y)$ ja tegu on paarisfunktsiooniga, mida saab sümmeetrilistes rajades lihtsamini integreerida. Valemi (13.4) eeldused on täidetud (pindalafunktsioon $S(y)$ on olemas, pidev ja alati kasvav ($-a\leqslant y\leqslant 0$) või kahanev ($0\leqslant y\leqslant a$) ruut) ja seega $V=\int_\alpha^\beta S(y)\,\mathrm{d}y$, kus $\alpha=-a$, $\beta=a$ ja $S(y)=4(a^2-y^2)$:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} 4(a^2-y^2)\,\mathrm{d}y = 2\int_0^a 4(a^2-y^2)\,\mathrm{d}y = 8\int_0^a (a^2-y^2)\,\mathrm{d}y \\ &= 8\cdot\left(a^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^a = 8\cdot(a^3-0-(\frac{a^3}{3}-0)) = 8\frac{2a^3}{3} = \frac{16a^3}{3}. \end{aligned}$$

Vastus: Otsitav ruumala on $V=\dfrac{16a^3}{3}$.

Illustreeriv joonis:





Ülesanne 151. Leidke ruumalad kehadel, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber x-telje.

f) $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$ $(a > 0)$, $x = -a$, $x = a$ ja $y = 0$ (aheljoon).

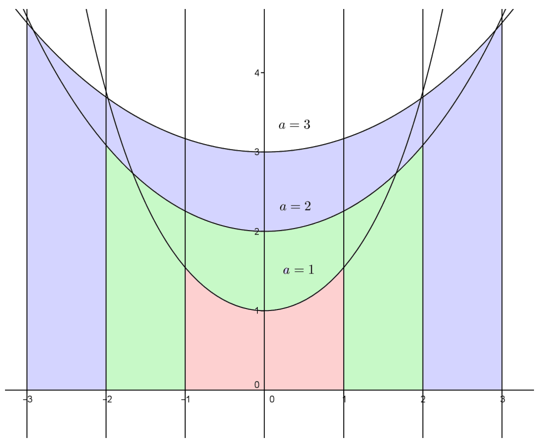
Lahendus: f) Kõigepealt paneme tähele, et

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}{2} = \frac{\operatorname{ch}^2 x + 1 + \operatorname{sh}^2 x}{2} = \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2}.$$

Nüüd saame kasutada valemit (13.5), ehk $V = \pi \int_\alpha^\beta f(x)^2 \, dx$, kus antud juhul $\alpha = -a$, $\beta = a$ ja $f(x) = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$ (muuseas saame me sümmeetriliste rajade jaoks tõttu kasutada ära seda, et $\operatorname{ch} x$ on paarisfunktsioon):

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-a}^{a} a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} \, dx = \pi a^2 \int_{-a}^{a} \frac{1 + \operatorname{ch}(2\frac{x}{a})}{2} \, dx \\
&= (\pi a^2 \frac{x}{2})\Big|_{-a}^{a} + \pi a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{-a}^{a} \operatorname{ch}(2\frac{x}{a}) \cdot \frac{a}{2} \, d\left(2\frac{x}{a}\right) \\
&= \pi \frac{a^3}{2} - (-\pi \frac{a^3}{2}) + \pi a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{0}^{a} \operatorname{ch}(2\frac{x}{a}) \cdot \frac{a}{2} \, d\left(2\frac{x}{a}\right) \\
&= \pi a^3 + \pi a^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\operatorname{sh}(2\frac{x}{a})\right)\Big|_{0}^{a} = \pi a^3 + \pi \frac{a^3}{2} (\operatorname{sh}(2) - \operatorname{sh}(0)) \\
&= \pi a^3 + \pi \frac{a^3}{2} \operatorname{sh} 2 = \pi a^3 (\frac{\operatorname{sh} 2}{2} + 1).
\end{aligned}$$

Vastus: Aheljoone pöörlemisel tekkiva keha ruumala on $V = \pi a^3 (\dfrac{\operatorname{sh} 2}{2} + 1)$.



Ülesanne 153. Leidke järgmiste joonte märgitud kaarte pikkused.

d) $y = \arcsin \mathrm{e}^{-x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

Lahendus: d) Kuna $f(x) = \arcsin \mathrm{e}^{-x}$ korral $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$ on pidev vahemikus $(0,1)$ ja $f(x)$ ise on pidev, on meil tegu lihtsa sileda kaarega, mille pikkuse saame valemist $l = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$. Praegu $a=0$ ja $b=1$, seega

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{1+\left(-\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{e^{-2x}}{|1-e^{-2x}|}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-e^{-2x}+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Kui võtta $t = \sqrt{1-e^{-2x}}$, siis $t^2 = |1-e^{-2x}| = 1-e^{-2x}$, kust $e^{-2x} = 1-t^2$ ja

$$\mathrm{d}t = \frac{-(-2e^{-2x})}{2\sqrt{1-e^{-2x}}}\mathrm{d}x = \frac{e^{-2x}}{t}\mathrm{d}x = \frac{1-t^2}{t}\mathrm{d}x.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{1}{t}\cdot\frac{t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{arth} t\Big|_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} = \operatorname{arth}\sqrt{1-e^{-2}} - 0 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-e^{-2}}}{1-\sqrt{1-e^{-2}}}, \end{aligned}$$

sest $0 \leqslant x \leqslant 1$ (kui $|x| > 1$, siis tuleks $\operatorname{arth} t$ asemel $\operatorname{arcth} t = -\operatorname{arth} t$).

Vastus: Vaadeldava kaare pikkus on $l = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{1-e^{-2}}}{1-\sqrt{1-e^{-2}}}$.

Ülesanne 154. Leidke järgmiste joonte pikkused.

i) $r = a(1+\cos\varphi)$ (kardioid).

Lahendus: i) Kuna $r'(\varphi) = -a\sin\varphi$ on pidev funktsioon ja $r(\varphi)$ on samuti pidev, siis on tegu lihtsa sileda kaarega ja me saame kasutada valemit $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi$, kus praegu $\alpha = 0$ ja $\beta = 2\pi$ (täisring). Siit $a > 0$ tõttu

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} a\sqrt{1+2\cos\varphi+1}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \sqrt{2}^2 a\int_0^{2\pi}|\cos\frac{\varphi}{2}|\,\mathrm{d}\varphi = 2a\int_0^{2\pi}|\cos\frac{\varphi}{2}|\cdot 2\cdot \mathrm{d}(\frac{\varphi}{2}) \\
&= 4a\int_0^{\pi}|\cos t|\cdot\mathrm{d}t = 4a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cdot\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\cos t|\cdot\mathrm{d}t\right) \\
&= 4a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos t)\cdot\mathrm{d}t\right) = 4a\left(\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) \\
&= 4a(1-0-(0-1)) = 8a.
\end{aligned}
$$

Vastus: Kardioidi pikkus on $l = 8a$.

Illustratsioone kaarepikkuste leidmisele: