Matemaatiline analüüs I
4. praktikumi näidislahendusi

Ülesanne 19. Tõestage definitsiooni põhjal järgmised võrdused.

d) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{2x+1}=\sqrt{7}$.

Lahendus:

e) Definitsiooni kohaselt on meil tarvis näidate, et iga $\varepsilon>0$ korral leidub $\delta>0$ selliselt, et kui $|x-3|<\delta$, siis $|\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}|<\varepsilon$. Fikseerime vabalt $\varepsilon>0$. Meil on vaja, et kehtiks $|\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}|<\varepsilon$. See võrratus on samaväärne võrratusega

$$\left|\frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{7})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{7})}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{7}}\right|=\left|\frac{2x+1-7}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{7}}\right|=\frac{|2x-6|}{|\sqrt{2x+1}+\sqrt{7}|}<\varepsilon.$$

Kuna $|2x-6|,\sqrt{2x+1},\sqrt{7}\geqslant 0$, siis $\left|\frac{2x-6}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{7}}\right|<\left|\frac{2x-6}{\sqrt{7}}\right|$ ja eelmise võrratuse kehtimiseks piisab sellest, et $\left|\frac{2x-6}{\sqrt{7}}\right|<\varepsilon$ ehk $2|x-3|<\varepsilon\sqrt{7}$ ehk $|x-3|<\dfrac{\varepsilon\sqrt{7}}{2}$. Järelikult otsitavaks arvuks δ sobib $\dfrac{\varepsilon\sqrt{7}}{2}>0$.

Ülesanne 20. Leidke järgmised piirväärtused.

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}}$.

Lahendus:

g) Selle piirväärtuse leidmisel võib kasutada teisendusi

$$\frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2-b^2}$$

ja

$$(1-c)(1+c+c^2) = 1-c^3.$$

Võttes $a = 1$, $b = \sqrt{x^2+1}$ ja $c = \sqrt[3]{x^2+1}$ saame, et astmefunktsiooni x^α pidevuse tõttu

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\sqrt{x^2+1})(1-\sqrt[3]{x^2+1})(1+\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2})}{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\sqrt{x^2+1})(1-(x^2+1))}{(1-(x^2+1))(1+\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} \\
&= \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Vastus: Otsitav piirväärtus on $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2}{3}$.

Ülesanne 21. Leidke järgmised piirväärtused.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arccos \log x}{\sin \frac{\pi x}{6}}$.

Lahendus:

d) Kuna kõik funktsiooni $f(x)$ väärtuse leidmisel kasutatavad funktsioonid on elementaarfunktsioonid ja järelikult pidevad, siis

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arccos \log x}{\sin \frac{\pi x}{6}} = \frac{\arccos \log 1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\arccos 0}{\frac{1}{2}} = 2\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Vastus: Leidsime, et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arccos \log x}{\sin \frac{\pi x}{6}} = \pi$.

Ülesanne 23. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud ja leidke nende funktsioonide ühepoolsed piirväärtused märgitud punktides a ja b.

a) $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{kui } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x-1, \text{kui } 1 < x \leqslant 3, \end{cases}$

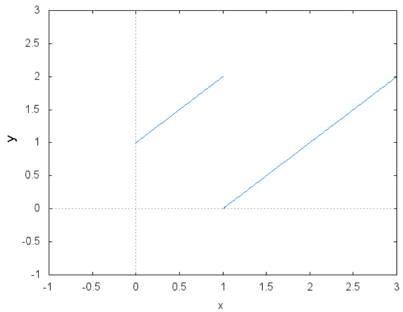
$a = 1,\ b = 2.$

Lahendus:

a) Kasutades näiteks Maxima käske

```
f(x) := if x>=0 and x<=1 then x+1 else if x>1 and x<=3 then x-1;
```

ja `plot2d(f(x),[x,0,3]);` ning natuke ümberjoonistamist, saame järgmise graafiku:



Kuna hulgas $[0,1]$ kehtib $f(x) = x+1$, hulkades $(1,2]$ ja $(1,3]$ aga $f(x) = x-1$, ning funktsioonid $x+1$ ja $x-1$ on pidevad, siis

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x+1 = \lim_{x\to 1} x+1 = 2, \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} x-1 = \lim_{x\to 1} x-1 = 0$$

ja

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} x-1 = \lim_{x\to 2} x-1 = 1 = \lim_{x\to 2} x-1 = \lim_{x\to 2+} x-1 = \lim_{x\to 2+} f(x).$$

Need vastused on ka joonisega kooskõlas.

Vastus: Oleme leidnud, et $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 0$ ja $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 2+} f(x)$.

Ülesanne 25. Leidke järgmised piirväärtused või tõestage, et piirväärtus puudub.

k) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$; m) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$; t) $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$.

Lahendus:

k) Kui võtta $x_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ ja $\hat{x}_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{4})\pi}$, siis

$$\lim_n x_n = \lim_n \frac{1}{(2n+1)\pi} = 0 = \lim_n \frac{1}{(2n+\frac{1}{4})\pi} = \lim_n \hat{x}_n.$$

Samas $\lim\limits_n \frac{1}{x_n} = \lim\limits_n \sin[(2n+1)\pi] = 0$, kuid $\lim\limits_n \sin\frac{1}{\hat{x}_n} = \lim\limits_n \sin[(2n+\frac{1}{4})\pi] = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Oletades vastuväiteliselt, et $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ eksisteerib, siis Heine kriteeriumi kohaselt peaks kehtima $\lim\limits_n \sin\frac{1}{x_n} = \lim\limits_n \sin\frac{1}{\hat{x}_n}$, sest $\lim\limits_n x_n = 0 = \lim\limits_n \hat{x}_n$.
Ilmselt $0 \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, järelikult seda piirväärtust ei ole olemas.

m) Kuna siinusfunktsioon on tõkestatud, st $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, siis $x > 0$ (protsess on $x\to\infty$) korral $\frac{-1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$. Nüüd

$$0 = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x} \leqslant \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} \leqslant \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

järelikult keskmise muutuja omaduse tõttu $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$.

t) Antud juhul on meil tegu $0\cdot\infty$ tüüpi määramatusega. Selle elimineerimiseks kasutame jälle läbikorrutamist koos alumise täisosa definitsiooniga. Viimase kohaselt $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$, seega $x > 0$ (me uurime protsessi $x \to 0+$) korral $1 - x < x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant 1$. Keskmise muutuja omaduse abil

$$\lim_{x\to 0+} 1 - x < \lim_{x\to 0+} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \lim_{x\to 0+} 1$$

ehk $1 - 0 = 1 \leqslant \lim\limits_{x\to 0+} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant 1$.

Vastus: Esimene otsitavatest piirväärtustest puudub, teine on $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x} = 0$ ja kolmas on $\lim\limits_{x\to 0+} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 1$.

Ülesanne 27. Leidke järgmised funktsiooni piirväärtused.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x+\ln 2}$.

Lahendus:
c) Siin on tegu $1^{-\infty}$ tüüpi määramatusega (see EI OLE üldiselt võrdne ühega). Kasutades fakti $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$, muutujavahetusi $y=1-x$ ning $z=y-1$ ja asjaolu, et kui $x\to-\infty$, siis $y=\to\infty$ ja $z\to\infty$, saame, et

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+\ln 2} &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+\ln 2} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\frac{x-1+1}{x-1}}\right)^{x+\ln 2}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}\right)^{x-1+1+\ln 2} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{y}}\right)^{-y+1+\ln 2}\\
&= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y+1}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{y}\right)^{\ln 2}}\\
&= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y+1}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{y-1}{y}\right)^{\ln 2}}\\
&= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y-1}}\cdot\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{\ln 2}\\
&= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{\ln 2}\\
&= \frac{1}{\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}}\cdot\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\ln 2}\\
&= \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1^{1+\ln 2}} = \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Vastus: Saime, et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x+\ln 2}=\dfrac{1}{e}$.

Ülesanne 28. Otsustage, millised väidetest $\alpha \in O(\beta)$, $\alpha \in o(\beta)$, $\alpha \in \Theta(\beta)$ (või vastupidised) kehtivad.

i) $\alpha_n = n^{100}$, $\beta_n = 2^n$, kui $n \to \infty$.

Lahendus:

i) Selleks, et teha kindlaks funktsioonide α ja β omavaheline asümptootiline käitumine, peame me uurima suurust $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ (või selle pöördsuurust $\frac{\beta_n}{\alpha_n}$) protsessis $n \to \infty$ Kui $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$, siis $\alpha \in o(\beta)$, kui aga $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \pm\infty$, siis $\beta \in o(\alpha)$, kui $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ ($\frac{\beta_n}{\alpha_n}$) on alt ja ülalt tõkestatud, siis $\alpha \in O(\beta)$ ($\beta \in O(\alpha)$) ja kui $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$, siis $\alpha \sim \beta$. Leiamegi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{2^n}$. Siin on meil jälle mugav kasutada keskmise muutuja omadust: tänu võrdusele $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (loengukonspekti lause 2.9) kehtib $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{100}}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{100}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^{100}}{2} = \frac{1}{2}$. Järelikult jada piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et kui $n > N$, siis $\left|\sqrt[n]{\frac{n^{100}}{2^n}} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$. Sel juhul aga iga $n > N$ puhul $0 \leqslant \left(\sqrt[n]{\frac{n^{100}}{2^n}}\right)^n < \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ja tänu lausele 2.7 (sest $\frac{3}{4} < 1$)

$$0 = \lim_{n\to\infty} 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{100}}{2^n}} < \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

Keskmise muutuja omaduse abil ongi nüüd $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{2^n} = 0$. Järelikult $\alpha \in o(\beta)$, mistõttu ka $\alpha \in O(\beta)$. Kuna $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}} = \infty$ (sest $\frac{\alpha_n}{\beta_n} > 0$), siis protsessis $n \to \infty$ ei ole suurus $\frac{\beta_n}{\alpha_n}$ ei tõkestatud ega nulliks või üheks koonduv, järelikult ei kehti ükski väidetest $\beta \in O(\alpha)$, $\beta \in o(\alpha)$ ja $\beta \in \Theta(\alpha)$.

Vastus: Neist väidetest kehtivad täpselt kaks: $\alpha \in o(\beta)$ ja $\alpha \in O(\beta)$.

Ülesanne 29. Näidake, et

c) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, kui $x \to \infty$.

Lahendus:

c) Meenutame kõigepealt, et $\alpha \sim \beta$ protsessis $x \to \infty$ parajasti siis, kui $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Seetõtu on meil vaja leida piirväärtus

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2}\right).$$

See on $\infty-\infty$ tüüpi piirväärtus, mille leidmisel aitab jälle sobiva arvuga läbikorrutamine:

$$\begin{aligned}
2\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2}\right) &= 2\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}} \\
&= 2\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}} \\
&= 2\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}}} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \\
&= 2\cdot\frac{1}{1+1} = 1
\end{aligned}$$

Seega tõepoolest $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ protsessis $x \to \infty$.

Ülesanne 30. Leidke järgmised piirväärtused.

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1-x^2}-\sqrt[5]{1+2x}}{\sin x}$; q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2\tan x^2}{2x^2-\ln(1+x^2)}$.

Lahendus:

k) Siin on tegu $\dfrac{0}{0}$ tüüpi määramatusega. Selle piirväärtuse leidmisel on efektiivne kasutada võrdusi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{x}{n}}=1$ ja $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Paneme tähele, et kui $x\to 0$, siis ka $-x^2\to 0$ ja $2x\to 0$, mistõttu kehtivad võrdused $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1-x^2}-1}{\frac{-x^2}{5}}=1$ ning $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\frac{2x}{5}}=1$. Seega

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1-x^2}-\sqrt[5]{1+2x}}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1-x^2}-\sqrt[5]{1+2x}}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[5]{1-x^2}-1-(\sqrt[5]{1+2x}-1)\right)\cdot\sin x}{\sin x\cdot x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1-x^2}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[5]{1-x^2}-1\right)(-x)}{-x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[5]{1+2x}-1\right)\cdot 2}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0}(-\frac{x}{5})-\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}=0-\frac{2}{5}=-\frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

q) Selles ülesandes on piirväärtuseks $\dfrac{0}{0}$ tüüpi määramatus, mille leidmiseks saab kasutada võrdusi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ ja $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$. Paneme jälle tähele, et kui $x\to o$, siis ka $x^2\to 0$ ja seega $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}=1$. Järelikult

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2\tan x^2}{2x^2-\ln(1+x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x^2}{2x^2-\ln(1+x^2)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1.
\end{aligned}$$

Vastus: Leidsime, et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1-x^2}-\sqrt[5]{1+2x}}{\sin x}=-\dfrac{2}{5}$ ja $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2\tan x^2}{2x^2-\ln(1+x^2)}=1$.