Matemaatiline analüüs I
6. praktikumi näidislahendus

Ülesanne 33. Olgu $a > 0$. Tõestage, kasutades piirväärtuse ε-δ-keelset definitsiooni, et järgmised funktsioonid on pidevad punktis a.

b) $f(x) = x^2$.

Lahendus:

b) Definitsiooni kohaselt on meil tarvis näidata, et $\lim\limits_{x\to a} = f(a)$, ehk iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ selliselt, et kehtib järeldus

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon.$$

Kuna juhul $|x - a| < \delta$ kehtivad võrratused $a - \delta < x < a + \delta$, siis $2a - \delta < x + a < 2a + \delta$. Seega sel juhul kehtiks ka $x + a \leqslant |x + a| < 2a + \delta$, sest $2a + \delta > 0$. Ehk kui $|x - a| < \delta$, siis

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a| < \delta \cdot (2a + \delta) = \delta^2 + 2a\delta.$$

Järelikult võttes $\delta^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ ja $2a\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, ehk valides $\delta = \min(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \frac{\epsilon}{4a}) > 0$, saame, et

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a| < \delta^2 + 2a\delta \leqslant (\frac{\varepsilon}{2})^2 + 2a\frac{\epsilon}{4a} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

mida oligi vaja näidata.