Matemaatiline analüüs I
10. praktikum

Olgu I intervall, olgu antud funktsioonid $x, y\colon I \to \mathbb{R}$.
Olgu $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$, kus $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ iga $t \in I$ korral.
Vektorfunktsiooni γ väärtuste hulka

$$\gamma(I) = \big\{\gamma(t)\colon\ t \in I\big\} = \big\{(x(t), y(t))\colon\ t \in I\big\}$$

nimetatakse *jooneks* ruumis $\mathbb{R}^2$. Kui on antud funktsioonid x ja y, öeldakse mõnikord, et joon on antud *parameetriliselt.*

Joonte kirjapanekul pannakse sageli kirja ainult joone punktihulka määrav tingimus. Nii näiteks kirjutatakse $\{(x, f(x))\colon\ x \in I\}$ asemel $y = f(t)$. Parameetriliselt antud joone $\{(x(t), y(t))\colon\ t \in I\}$ asemel kirjutatakse $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Joon $\gamma(I)$ määrab punkti $\gamma(t_0)$ ümbruses funktsiooni f $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \exists\delta > 0 : \forall\, t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)\ \ y(t) = f(x(t)).$$

Olgu I intervall, olgu joon $\gamma(I)$ antud funktsioonidega $x(t), y(t)\colon I \to \mathbb{R}$. Olgu x ja y n korda diferentseeruvad punktis t_0 ning määraku joon $\gamma(I)$ punkti

$$\gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_o, y_0)$$

ümbruses n korda diferentseeruvat funktsiooni $y = f(x)$.

Lause. $f^{'}(x_0) = f'(x(t_o)) = \dfrac{y^{'}(t_o)}{x'(t_o)}$ ja $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x(t_o)) = \dfrac{(f^{(n-1)})'(x(t_o))}{x'(t_o)}$,

kus viimast murdu tuleb lugeda selliselt, et esmalt diferentseeritakse $n-1$ järku tuletis $(f^{(n-1)}(x(t))$ muutuja t järgi ja jagatakse funktsiooni x tuletisega samuti t järgi.

Olgu $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Joont $\{(a+tu, b+tv)\colon\ t \in \mathbb{R}\}$ nimetatakse *sirgeks*. Vektorit

$$\vec{s} = (u, v)$$

nimetatakse selle sirge *sihivektoriks*. Sihivektoriga ristuvat vektorit

$$\vec{n} = (v, -u)$$

nimetatakse selle sirge *normaalvektoriks*. Sihi- ja normaalvektorit võib korrutada suvalise nullist erineva arvuga, tulemusena saadav vektor määrab ikka sama sirge.

Võrrandit $(x-a)\cdot v = (y-b)\cdot u$ sirge määramiseks nimetatakse selle sirge *kanooniliseks võrrandiks*. Sageli kirjutatakse võrrand kujul

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v}.$$

(NB! Nulliga jagamine!)

Lause. $\big\{(x, y)\colon\ (x-a)\cdot v = (y-b)\cdot u\big\} = \big\{(x, y)\colon\ vx - uy + (bu - av) = 0\big\}$.

Võrrandit kujul

$$Ax + By + C = 0$$

(kus $(A, B) \neq (0,0)$) sirge määramiseks ruumis $\mathbb{R}^2$ nimetatakse selle sirge *üldvõrrandiks*. Üldvõrrandist on mugav välja lugeda sirge normaalvektorit (A, B) ja sihivektorit $(B, -A)$.

Joone $\gamma(I)$ *puutujaks* punktis $(x(t_0), y(t_0))$ nimetatakse sirget

$$\big\{(x(t_0) + tx'(t_0), y(t_0) + ty'(t_0)\colon\ t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Olgu I intervall, olgu joon $\gamma(I)$ antud funktsioonidega $x, y\colon I \to \mathbb{R}$. Olgu x ja y diferentseeruvad punktis t_0 ning $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$.

See tähendab, punktis $(x(t_0), y(t_0))$ sellele joonele tõmmatud puutuja sihivektor on $\big(x'(a), y'(b)\big)$.

Joone $\gamma(I)$ *normaaliks* punktis $(x(t_0), y(t_0))$ nimetatakse sirget, mis läbib punkti $(x(t_0), y(t_0))$ ja mille sihivektor on $(y'(t_0), -x'(t_0))$ ja normaalvektor on $(x'(t_0), y'(t_0))$.

Nurka $\angle(s, t)$ sirgete s ja t, mille sihivektorid on vastavalt $\vec{s} = (s_1, s_2)$ ja $\vec{t} = (t_1, t_2)$ ning normaalvektorid $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2)$ ja $\vec{n} = (n_1, n_2)$, vahel saab leida valemist

$$\cos\angle(s, t) = \frac{\langle \vec{s}, \vec{t}\rangle}{|\vec{s}|\cdot|\vec{t}|} = \frac{s_1\cdot t_1 + s_2\cdot t_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}\cdot\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} = \frac{\langle \overrightarrow{m}, \vec{n}\rangle}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{m_1\cdot n_1 + m_2\cdot n_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}\cdot\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}.$$