Matemaatiline analüüs I
12. praktikum

Olgu $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ ning $a \in X^\circ$.

Teoreem 6.7. (Taylori valem jääkliikmega Peano kujul)**.** Kui funktsioon f on n korda diferentseeruv punktis a, siis

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(a,x),$$

kus $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_{n+1}(a,x)}{(x-a)^n} = 0$, st. $R_{n+1}(a,x) \in o((x-a)^n)$.

Olgu $c, d \in \mathbb{R}$, kusjuures $c < d$.

Teoreem 6.7. (Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul)**.** Kui funktsioon f on $n+1$ korda diferentseeruv vahemikus (c,d) ja $a, x \in (c,d)$, siis leidub $\xi \in (a,x)$ (või $\xi \in (x,a)$, kui $x < a$) nii, et

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Teoreem (Taylori valem jääkliikmega Cauchy kujul)**.** Kui funktsioon f on $n+1$ korda diferentseeruv vahemikus (c,d) ja $a, x \in (c,d)$, siis leidub $\xi \in (a,x)$ (või $\xi \in (x,a)$, kui $x < a$) nii, et

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a).$$